

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_224647**

UNIVERSAL  
LIBRARY

**THE BOOK WAS  
DRENCHED**

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No.

۵۳۲  
ب-۳

Accession No.

۴۴۵

Author

Title

ماسکونیات  
محمد نذیر الدین

This book should be returned on or before the date last marked below

---

**OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY**

Call No. ۵۳۲  
پ-م

Name of Book ماسکونيات

Name of Author محمد نذير الدين







سلسلہ کتب اسلامیہ

# ماسکونیات

تصنیف

ڈبلیو ایچ بیسٹ ایس۔ سی۔ ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

و

اے۔ ایس۔ ریفرے ایم۔ اے

مترجمہ

محمد زید الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکاری

۱۳۲۹ھ م ۱۳۳۰ھ م ۱۹۳۱ء

طبع و نشر دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ



# فہرست اغلاط

نوٹ :- مطالعہ سے قبل ان غلطیوں کی تصحیح فرمائیے۔

صفحہ	غلط	صفحہ	غلط	صفحہ	غلط	صفحہ	غلط
۱	پانی	۱۶	پانی	۱۶	پانی	۱۶	پانی
۲	جذبی	۱۸	جذبی	۱۸	جذبی	۱۸	جذبی
۴	اور پارہ	۱۱	اور پارہ	۱۱	اور پارہ	۱۱	اور پارہ
۵	زیر	۲۱	زیر	۲۱	زیر	۲۱	زیر
۳	ہونگیں	۲۴	ہونگیں	۲۴	ہونگیں	۲۴	ہونگیں
۵	قی کو ب	۲۵	قی کو ب	۲۵	قی کو ب	۲۵	قی کو ب
۶	سے گزرنے	۱۸	سے گزرنے	۱۸	سے گزرنے	۱۸	سے گزرنے
۸	ج	۱۲	ج	۱۲	ج	۱۲	ج
۶	پہاؤش	۳۲	پہاؤش	۳۲	پہاؤش	۳۲	پہاؤش
۹	پہاؤش	۲۰	پہاؤش	۲۰	پہاؤش	۲۰	پہاؤش
۷	جزو	۳۴	جزو	۳۴	جزو	۳۴	جزو
۱۰	فتارے	۱۸	فتارے	۱۸	فتارے	۱۸	فتارے
۱۱	ایکائی	۲۰	ایکائی	۲۰	ایکائی	۲۰	ایکائی
۷	اسماع	۳۶	اسماع	۳۶	اسماع	۳۶	اسماع
۷	کچھ	۱۱	کچھ	۱۱	کچھ	۱۱	کچھ
۷	جھم	۳۷	جھم	۳۷	جھم	۳۷	جھم
۱۳	منجائش	۲۲	منجائش	۲۲	منجائش	۲۲	منجائش
۷	(د+مف د)	۱۸	(د+مف د)	۱۸	(د+مف د)	۱۸	(د+مف د)
۱۶	مکانی	۶	مکانی	۶	مکانی	۶	مکانی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۹	۶	وزن	وزن	۷۳	۲۱	حاصل ربون	حاصل ضربون
۳۳	۵	عن	عن	۷۵	۹	شوت	شوت
"	۱۵	کمزور	کمزور	"	۲۰	وزن	وزن
"	۱۷	<	<	۷۶	۱۱	پر	پر
"	۱۹	-	(زائد ہے نکال دیا جائے)	۷۹	۰	ل	ل
۵۱	۲	ما	ما			(شکل میں)	
۵۲	۳	ج ی	ج ی	۸۰	۱	ب و ج	ب و ج
۵۳	۳	دوم	دوم	"	۲	لو ب	لو ب
		(نسب نمائیں پہلا)		"	۱۱	دو زائد دوں	دو زائد دوں
۵۴	۸	ما	ما	۸۱	۸	<	>
"	۱۵	دائرہ ایک	دائرہ کا ایک	"	۹	ت	ت
۵۷	۲	جہ جہ طہ	جہ جہ طہ	"	۱۰	<	>
"	۵	ب	ب	"	۱۷	کثافت	کثافت
"	۱۳	مانع میں	مانع ہیں	۸۳	۳	توازن	توازن
۵۸	۱	داؤ	دباؤ	۸۵	۹	فانون	فانون
"	۶	چ	ج	"	۱۵	آدب	آدب
۵۹	"	ر	ر	۸۶	۱۱	ہی	ہی
		(دوسری شکل میں)		۸۷	۳	بوجب	بوجب
۶۰	۷	مشاہدہ	یہ مشاہدہ	"	۱۳	ھ ، ھ	ھ ، ھ
۶۲	۱۷	استوانہ	اسطوانہ	"	۱۷	۱/۲ (ب - ۱/۲)	(یہ زائد ہے نکال دیا جائے)
۶۵	۱۹	سیال	سیال	"	۱۷	۱/۲	۱/۲
۶۶	۲۰	سیال	سیال	"	نکھل	ا (نیچے کا)	ا
۶۳	۲۰	د	د	۸۸	۶	ق د ق	ق د ق
"	۲۰	ست	ست	۸۹	۳	فلز	دل

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸۹	۷	تیں	تیں	۱۳۹	۱۳	و	و
۹۰	۴	ح	ح	۱۴۱	۱۱	تی	تی
۹۱	۱۲	ا	ا	۱۴۲	۱۳	اور	اور
۹۲	۱۴	اکانی	اکانی	۱۴۳	۱۲	ترشوں	ترشوں
۹۳	۶	ج	ج	۱۴۵	۹	و	و
۹۴	۱۷	مخروطی	مخروط	۱۴۶	۱۹	مخروط	مخروط
۹۵	۲۰	تراؤ	تراؤ	۱۴۸	۳	نار	نار
۱۰۲	۲۰	ن ق	ن ق	۱۵۱	۳	نار	نار
۱۰۶	۱	فائیت کے	فائیت کی	۱۶۰	۱۵	پوری	پوری
۱۰۷	۹	نیر	نیر	۱۶۱	۲۲	پوری	پوری
۱۰۸	شکل	ڈ (ادب کا)	ڈ (ادب کا)	۱۶۸	۷	ن	ن
۱۰۹	۶	مناسب	مناسب	۱۶۹	۱۳	منعبر	منعبر
۱۱۰	۱۳	ع	ع	۱۷۰	۲	تقین	تقین
۱۱۱	۱۲	کے	کے	۱۷۱	۵	رکھ کر	رکھ کر
۱۲۰	۱۷	جب طے	جب طے	۱۷۲	۱۷	ت	ت
۱۲۶	۱	م	م	۱۷۶	۱۱	ج	ج
۱۲۷	۴	ی	ی	۱۸۰	۱	ج	ج
۱۲۹	۳	راج کر	راج کر	۱۸۱	۲۱	م	م
۱۳۰	۱۸	ار پر وار	ار پر وار	۱۸۲	۱۹	پر	پر
۱۳۱	۴	نشر (دوسرا)	نشر	۱۸۳	۱۱	جائے	جائے
۱۳۵	۱۱	ط	ط	۱۸۷	۲	پھینکے	پھینکے
۱۳۷	۱۱	ح ث	ح ث	۱۸۸	۱۹	کے	کے
۱۳۷	۴	ح	ح	۱۹۰	۸	ح	ح
۱۳۸	۲۱	لا	لا	۱۹۱	۱۱	ح	ح

صفحہ	سطر	فہرست	صحیح	صفحہ	سطر	فہرست	صحیح
۱۹۰	۱۹	ف ن یگ	ف ن یگ	۲۵۲	۳	و ا ج ب ا ف	و ا ج ب ا ف
۱۹۲	۱۸	۱ -	۱ -	۲۵۵	۹	۲ ت -	۲ ت -
۱۹۳	۱۸	م ن یگ	م ن یگ	۲۹۰	۴	ف ر س ا ف ر س م	ف ر س ا ف ر س م
۱۹۴	۱۸	(	(	۱۵	۱۵	ص ف ر	ص ف ر
۲۰۶	۵	ح	ح	۵	۵	ف ر س	ف ر س
-	۱۳	ر ک ی ک	ر ک ی ک	۲۹۲	۲	س ب ج	س ب ج
۲۱۲	۱۵	س ت د ی ر	س ت د ی ر	۲۶۹	۴	+	+
۲۱۳	۱	و × ن ن	و × ن ن	۲۸۴	۱۳	ت	ت
-	۴	تو ت	تو ت	۲۸۶	۶	Darboux	Darboux
-	۳	ج م ف	ج م ف	۲۸۸	۹	Britannica	Britannica
۲۱۴	۸	ن	ن	۲۹۲	۴	Britannica	Britannica
-	۱۵	(	(	-	۶	Über die	über der
۲۱۶	۱	ب	ب	۲۹۹	۱	-	-
۲۲۱	۱۶	م م =	م م =	۳۰۳	۶	( ر و یانی )	( ر و یانی )
۲۲۲	۳	شکل	شکل	۳۰۹	۱۳	( لا + ۹ )	( لا + ۹ )
۲۲۵	۳	م یں	م یں	۳۱۵	۱۲	نقل	نقل
۲۲۶	۲۰	ج ن ا	ج ن ا	۳۱۶	۱	ا س حرکت صرف	ا س حرکت صرف
۲۲۸	۱	ج ن ا	ج ن ا	-	۶	س ا ل	س ا ل
۲۲۹	۸	ن د ع	ن د ع	۳۱۸	۱۶	م ی خ ن	م ی خ ن
۲۳۱	۹	۱/۲	۱/۲	۳۲۲	۵	ک ر	ک ر
۲۳۲	۴	ج ن ا	ج ن ا	نوٹ :- صفحہ ۱۳ پر پہلی سطر کے بعد جب تک کہ عبارت کا اضافہ نہ کیا جائے "نیز مشا کے ہٹاؤ کی وجہ سے جسم کے وزن کے سوا کا نقصان = (رٹ ل - گ) ط"			
۲۳۰	۵	-	-				
۲۵۰	۱	د	د				
۲۵۱	۱۹	د م ل	د م ل				



# فہرست مضامین ماسکونیات باب اول

صفحہ

۱

۱۰

دفعات

۱ - ۱۳ تعریفات - دباؤ کا مساوی ہونا - دباؤ کا انتقال - کشاف کا ناپ  
اشکلہ

## باب دوم

۱۳

۱۹

۲۸

۳۰

۳۲

۱۵ - ۲۰ توازن کی شرط  
۲۱ - ۲۴ مساوی دباؤ کی سطحیں  
۲۷ غیر متجانس مائع  
۲۸ - ۲۹ مثالیں  
۳۰ - ۳۲ گھومنے والے سیال

## باب سوم

۳۳-۴۴ جہل دباؤ۔ دباؤ کے مرکز

اشکلہ

## باب چہارم

۴۸-۵۵ تیرنے والے جسم کا توازن۔ اچھال کی سطح۔ توازن کے محل

۵۶-۶۴ خاص صورتوں میں اچھال کی سطحیں

اشکلہ

## باب پنجم

۶۵-۷۳ توازن کی قائمیت۔ پس مرکز

۷۴ ڈیوپن کا مسئلہ

۷۵ لیکرٹ کا مسئلہ

۷۶ بار میں اضافہ

۷۷ تیراج کا اثر جہاز پر

۷۸-۷۹ اچھال کی سطح کے عمومی

۸۰ تیراد کی سطح۔ لیکرٹ کا مسئلہ

۸۱ مثالیں

۸۲-۸۹ محدود ہٹاؤ۔ ٹیڈ کی صورتیں

۹۰-۹۲ غیر متجانس مائع

صفحہ

۱۳۲

۱۵۰

دفعات

۹۳-۱۰۵ توانائی کے اصول کا اطلاق  
مثلاً

## باب ہشتم

۱۶۷

۱۶۳

۱۰۸-۱۰۶ تیرنے والے اجسام کے اهتزازات  
مثلاً

## باب ہفتم

۱۷۸

۱۸۲

۱۹۰

۲۰۳

۱۰۹-۱۱۱ کلیہ بائل - پیش مطلق  
۱۱۲-۱۲۱ گیسوں کا آمیزہ - ششہم - حرارت نوعی  
۱۲۲-۱۲۹ کرہ ہوائی - ارتفاعوں کا معلوم کرنا  
مثلاً

## باب ہشتم

۲۱۱

۲۱۳

۲۲۲

۲۲۱

۱۳۰-۱۳۲ لاکھ سطحوں کا تناؤ  
۱۳۳-۱۳۴ توجیر اور لدھیہ  
۱۳۸-۱۵۵ تناؤ اور دباؤ  
مثلاً

## باب نہم

۲۳۸

۱۵۶-۱۵۹ استوار یا کچلدار پتیرا

صفحہ

۲۵۲

۲۵۵

دفعات

۱۶۲-۱۶۱

نوشیہ

امثلہ

## باب دہم

۲۵۷

۲۶۷

۲۷۶

۲۸۰

۲۸۱

۲۹۳

۱۶۹-۱۶۳ سطحی تناؤ - شعاری منحنی

۱۷۱-۱۷۰ متوازی تختیاں

۱۷۲-۱۷۱ مانع کے قطرے

۱۷۵ تیرنے والی سوئی

۱۷۶-۱۸۵ مانع کی جھلیاں

امثلہ

## باب یازدہم

۳۰۵

۳۱۷

۳۲۵

۳۲۶

۳۲۷

۳۳۲

۳۳۹

۱۸۶-۱۹۳ گھومنے والے مانع کی بحیثیت کا اضافی توازن،

زمین کی شکل پر اطلاق

۱۹۴-۲۰۰ جیکوبی کا مسئلہ

۲۰۱ ناقصی اسطوانہ

۲۰۲ پوائنٹ کے مسئلہ

۲۰۳ توازن کی اور شکلیں

امثلہ

متفرق مثالیں

# ماسکونیات

## باب اول

۱۔ ہم عام تجربہ سے یہ معلوم کرتے ہیں کہ ایسی اشیاء میں جیسے ہوا اور پانی ہیں یہ خواص پائے جاتے ہیں کہ ان کے مادہ کے حصے ایک دوسرے سے نہایت آسانی کے ساتھ علیحدہ کیے جاسکتے ہیں اور تقسیم پذیری کی ان میں انتہائی قابلیت ہے۔ ان خواص کی توضیح مختلف عام واقعات سے ہو سکتی ہے۔ مثلاً سیال چیز میں آسانی ایک دوسرے کے اندر داخل ہو جاتی ہیں ایک سیال کی بہت کم مقدار کو دوسرے سیال کی بہت بڑی مقدار میں شامل کرنے سے اسکو انتہائی طور پر لطیف بنایا جاسکتا ہے۔ ہوا پمپ کے ذریعہ ہوا کو بہت رقیق کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح کے دوسرے واقعات سے یہ واضح ہوتا ہے کہ عملی طور پر سیال کی قسمت پذیری غیر محدود ہے اور یہ بھی معلوم ہو جاتا ہے کہ سیال کے حصوں کو ایک دوسرے سے جدا کرنے میں بہت ہی قلیل مزاحمت محسوس ہوتی ہے۔ اور عام طور پر قابل نظر انداز۔ ان مشاہدات کی تعمیم سے خود بخود ہم ایسی شے کا خیال کر سکتے ہیں کہ جس میں یہ خواص بدرجہ اتم موجود ہوں جو کم یا زیادہ ہر سیال عام میں پائے جاتے ہیں۔ اس سے ہم ذیل کے نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔

## سیال کال کی تعریف

۲۔ سیال کال ایسے ذرات کا مجموعہ ہوتا ہے جو خفیف ترین قوت کے زیر عمل فوراً ایک دوسرے سے جدا ہو جاتے ہیں۔ اس طرح اگر ایک لا انتہائی پلاسٹوسی اس قسم کے سیال کو کسی سمت میں تقسیم کرے تو اس عمل تقسیم میں کوئی مزاحمت وقوع پذیر نہ ہوگی

اور مستوی پر سیال کا دباؤ صرف عمودی سمت میں عمل کرے گا۔ یعنی سیال کا ل میں لزوجیت معدوم فرض کی جاتی ہے اور مرکز کی قسم سے کوئی قوت عمل نہیں کرتی۔  
اس طرح تعریف مندرجہ بالا سے سیال کی بنیادی خاصیت حسب ذیل قرار پاتی ہے۔  
سیال کا ل کا دباؤ ہمیشہ اُس سطح پر عمود وار عمل کرتا ہے جس کے ساتھ اس کا تماس ہو۔

دراصل کوئی سیال ایسا نہیں ہے کہ جس پر اعمال تقسیم یا تفصیل سے کم و بیش مزاحمت محسوس نہ ہوتی ہو۔ لیکن جیسا کہ اس تصور کا مفہوم قدرت کے ایسے اجسام سے حاصل ہوتا ہے جنکی شکل میں ذرا سی تبدیلی بہت بڑی قوت کے استعمال سے پیدا ہوتی ہے اسی طرح سیال کا ل کا مفہوم ایسی چیزوں کے مشاہدہ سے حاصل ہوتا ہے جن میں یہ خاصیت ہو کہ ان کے اجزا جیسا کہ آسانی سے جدا ہو سکیں اور دیکھنے میں عمل تقسیم درجہ انتہائی کم ہو سکے۔

تمام سیال خواہ ان کا درجہ لزوجیت کچھ ہی ہو ذیل کی تعریف میں آجاتے ہیں۔  
سیال ایسے ذرات کا مجموعہ ہے جو خفیف ترین قوت کے اثر کو قبول کر لیتے ہیں جو ان کے جدا کرنے میں کافی عرصہ تک لگائی جائے۔

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ساکن لزج سیال میں ماسی تعامل یا جذبی تناؤ نہیں ہوتا۔ اور اس لئے سیال کا ل کی طرح کسی ساکن سیال کا دباؤ ہمیشہ اس سطح پر عمود وار عمل کرتا ہے جو سیال کو مس کرتی ہے۔ اس طرح تمام سیالوں کے لئے بالفاظ لزوجیت علم سکون سیالات کے تمام مسائل درست ہیں۔

علم حرکت سیالات (ماہکونیات) میں سیال کی لزوجیت کے شامل کرنے سے حرکت کی مساواتیں بہت حد تک بدل جاتی ہیں۔

۲۔ سیالات کی دو قسمیں ہیں۔ مائعیات اور گیسیں۔ اول الذکر ایسی اشیاء ہیں۔ جیسے پانی اور بارہ جو قابل قدر دب نہیں سکتیں جب تک کہ بہت بڑے دباؤ کے زیر عمل ہوں۔ جو آزادانہ طور پر پھیل سکتی ہیں۔

اس لئے بعض اوقات ہم قسم اول کے سیالات کو بے چسک اور قسم دوم کو چسکدار کہیں گے۔  
۳۔ سیالات پر جاؤبار فرض کا انرا اسی طرح ہوتا ہے جس طرح دیگر اجسام پر۔ مائعیات کی صورت میں فوجیہ ظاہر ہے اور یہ کہ ہوا بھی وزن رکھتی ہے ایک بند برتن کو حتی الامکان ہوا سے

خالی کر کے وزن کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے نیز جو اربھائے کے وقوع سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سیالات پر سورج اور چاند کی کششیں اسی طرح عمل کرتی ہیں جس طرح کہ زمین کی کشش ان واقعات کی بنا پر نیز اس طرح کے اور واقعات کی بنا پر ان لیا جاتا ہے کہ تمام قسم کے سیالات قانون تجاذب کے تابع ہیں۔ یعنی اس قانون کے بموجب وہ دوسری مادی شیار پر کشش کا عمل کرتے ہیں اور ان پر بھی ان مادی اشیاء کی کشش کا عمل ہوتا ہے۔

## سیالی دباؤ کی پائش

۵۔ فرض کرو کہ کچھ سیالی مادہ بعض قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور ایک مستوی سطح سیال کے ساتھ تماس رکھتی ہے اور اس کے رقبہ پر جو سیال کا عمل ہے اس کے خلاف توازن پیدا کرنے کے لئے سطح پر قوت ق لگانی پڑتی ہے۔

اگر سیال کا عمل  $P$  پر کیساں ہو تو ق سے یہ سیالی دباؤنی اکائی رقبہ تقریباً  $P$  اگر دباؤ کیساں نہ ہو تو رقبہ  $A$  کے ہر نقطہ پر اسکو متغیر خیال کیا جاتا ہے اور اگر ایک نقطہ کے گرد کے چھوٹے رقبہ  $E$  پر قوت  $E$  عمل کرے تو  $E$  سے تقریباً دباؤ کی شرح رقبہ  $E$  پر تقریباً ہوگی۔

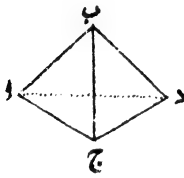
اگر  $E$  کو لا انتہا کم کر دیا جائے تو فرض کرو کہ انتہا میں  $E = 0$  تب بطور تقریب کے اس  $D$  کو ہم نقطہ زیر بحث پر دباؤ کا ناپ قرار دینگے۔  $D$  وہ قوت ہوگی جو کوئی رقبہ پر لگائی جائیگی اگر اس اکائی رقبہ پر شرح دباؤ کیساں خیال کی جائے اور نقطہ زیر بحث پر کے دباؤ کے مساوی ہو پس اگر کسی نقطہ پر دباؤ  $D$  ہو تو اس کے گرد کے چھوٹے رقبہ  $E$  پر قوت  $D \times E$  جب عمل کریگی جہاں جب انتہا میں  $D$  کے مقابلہ میں صفر ہو جاتا ہے جبکہ  $E$  (اور اسکی وجہ سے  $D$ ) صفر ہو جائے۔

۶۔ ساکن سیال کے کسی نقطہ پر دباؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔ سیال کے خواص میں یہ خاصیت سب سے اہم ہے اس کا ثبوت سیال کی بنیادی خاصیت سے حسب ذیل طریقہ سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

اگر ہم سیال کے ایک چھوٹے ذوار بندہ السطوح کے توازن پر غور کریں تو یہ معلوم ہوگا کہ اس کے رخوں پر کے دباؤ اور اس کی کمیت پر کی قوت عالمگیر متوازن قوتوں کا ایک نظم م پیدا کرتی ہیں۔

اول الذکر قوتیں رخنوں کے رقبوں پر منحصر ہونے کی وجہ سے ایسے بدلتی ہیں جیسے مجسم (جسکو ہجمات یا متجانس فرض کیا گیا ہے) کے کنارے کا مربع اور ثنائی الذکر قوت مجسم اور کثافت پر منحصر ہونے کی وجہ ایسی بدلتی ہے جیسے مجسم کے کنارے کا مکعب۔ اور اس لئے اگر مجسم کو لا ایتھا گھٹا دیا جائے جبکہ اس کی شکل ہمیشہ متشابه رہے تو موخر الذکر قوت بمقابلہ رخنوں پر کے دباؤ کے معدوم ہو جاتی ہے۔ اور اس لئے یہ دباؤ خود متوازن قوتوں کا ایک نظام پیدا کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ رخنوں  $\Delta$  ب ج اور ب ج د پر کے دباؤ کی شرحیں علی الترتیب  $d$  کے تعبیر ہوتی ہیں کنارے  $\Delta$  د کے متوازی ان قوتوں کو تحلیل کرو۔ تو چونکہ رقبہ  $\Delta$  ب ج اور ب ج د کے نکل  $\Delta$  د پر کے علی القیاس مستوی پر وہی ہیں (فرض کرو کہ



$$\Delta \text{ د } = \Delta \text{ د } = \Delta \text{ د}$$

$$\Delta \text{ د } = \Delta \text{ د}$$

اور اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دوسرے دو رخنوں پر کے دباؤ میں سے ہر ایک  $\Delta$  د کے مساوی ہے۔

اب چونکہ ذرا بعینہ السطوح کے رخ کسی سمت میں لئے جاسکتے ہیں اس لئے کسی نقطہ پر کا دباؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ اس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ سیال متحرک ہو۔ کیونکہ ڈی ایلمبرٹ کے اصول کے مطابق اگر موثر قوتوں کی سمت الٹ دی جائے تو یہ بیرونی یا عالم قوتوں کے ساتھ مل کر رخنوں پر کے دباؤ کے ساتھ متوازن ہونگیں۔ اور موثر قوتیں اُسی رقبہ کی چھوٹی مقدار میں جس رقبہ کی عامل قوتیں اور اس لئے بمقابلہ دباؤں کے معدوم ہو جاتی ہیں۔  
۷۔ مسئلہ بالا کا حسب ذیل ثبوت کوششی کی مثالوں سے لیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ  $\Delta$  ن اور ق سیال میں ایک دوسرے سے محدود فاصلے پر دو نقطے ہیں۔ محور  $\Delta$  ن کے گرد ایک بہت چھوٹے نصف قطر کا اسطوانہ بناؤ۔  $\Delta$  ق میں سے ایک مستوی  $\Delta$  ن ق کے علی القیاس کھینچو اور  $\Delta$  ن میں سے کوئی مستوی گزارو اور  $\Delta$  ن ق کی کمیت کے توازن پر غور کرو۔





یعنی د نقطہ ن میں سے گزرنیوالی سطویوں کے لئے مستقل ہے۔

## سیالی دباؤ کا انتقال

اگر کسی ساکن مائع کی سطح پر یا اس کے کسی دوسرے حصہ پر دباؤ ڈالا جائے یا اس میں اضافہ کیا جائے تو یہ دباؤ یا اضافہ دباؤ مائع کے سب حصوں میں مساوی طور پر منتقل ہو جاتا ہے۔

سیالوں کی یہ خاصیت بالارست تجربہ کی بنا پر حاصل ہوئی اور اس طور پر بعض اوقات اسے مان لیا جاتا ہے لیکن ہم سیال کی تعریف سے اسکو اخذ کر سکتے ہیں۔

فرض کر دو کہ ساکن مائع کی سطح میں ن کوئی نقطہ ہے اور سیال کے اندر ق کوئی دوسرا نقطہ ہے خط مستقیم ن ق کے گرد ایک چھوٹے نصف قطر کا اسطوانہ بناؤ جو نقطہ ن پر کی سطح اور ق میں گزرنے والے اور ن ق پر علی القوائم مستوی سے محدد ہو۔

اگر نقطہ ن پر کے دباؤ کو بقدر د کے زیادہ کیا جائے اور اسطوانہ پر کی اضافہ شدہ قوت کو اس کے محور کی سمت میں تحلیل کیا جائے تو جزو تحلیل د عہ کے مساوی ہے جہاں عہ اسطوانہ کے محور پر علی القوائم مستوی تراش کا رقبہ ہے اس کے مساوی قوت د عہ کو سمت ق ن میں نقطہ ق پر عمل کرنا چاہیے کیونکہ معنی سطح پر سیال کا دباؤ محور کے علی القوائم ہے اس لئے ق پر کا دباؤ بقدر د کے بڑھ جاتا ہے۔

اگر خط مستقیم ن ق پورے طور پر سیال کے اندر واقع نہ ہو تو ن اور ق کو مختلف خطوط سے جو بالتمام سیال کے اندر ہوں ملایا جاسکتا ہے۔ اور پھر ثبوت بالا کی تکرار سے ثابت ہو سکتا ہے کہ دباؤ د نقطہ ق پر بغیر کسی قسم کی تبدیلی کے منتقل ہو جاتا ہے۔

بقیہ صفحہ ۵۔ اور اسلئے

$$d = \rho \times \text{نقہ س ث فلا} + \frac{\rho}{2} \times \text{صف (س ث)}$$

تو تین جزوہ سلسل میں اس لئے آخری رقم مساوات کی دوسری اقسام کے متالہ میں صریحاً معدوم خیال کی جاسکتی ہے اور اسلئے د مستقل ہے۔

۹۔ اس خاصیت کی بنا پر مائع کا مادہ مشین کے طور پر قوت کی تضعیف کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔ اگر ایک پانی سے بھرے ہوئے بند برتن میں دوسرا مائع کر دئے جائیں اور ان کو خوب ہلکا کرنے والے فشاروں (ڈاکر سے بند کر دیا جائے اور پھر اگر کوئی قوت ق ایک فشار سے پر لگائی جائے تو دوسرے فشار سے پر ایک ایسی قوت ق لگائی پڑے گی کہ نسبت ق : ق نسبت ڈاکر کے مساوی ہو جاوے۔ کیونکہ رقبہ ڈاکر کے ہر نقطہ کے دباؤ میں اضافہ کی شرح رقبہ کے ہر نقطہ پر منتقل ہو جاتی ہے۔ اور اسلئے ڈاکر کی قوت اس کے رقبہ پر منحصر ہوتی ہے۔

(۹) ان دونوں فشاروں کا درمیانی عمل پیرم کے مشابہ ہے اور یہ ظاہر ہے کہ ڈاکر بڑھانے سے اور (کو گھٹانے سے ہم نسبت ق : ق کو جتنا بڑھانا چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

۱۰۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ سیالی کا دباؤ اس کی کثافت اور تپش پر منحصر ہوتا ہے۔ نیز اسکی نوعیت پر تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ اگر تپش مستقل رہے تو دباؤ اس فضا کے بالکس متناسب ہوتا ہے جبکہ سیال گھیرے ہوئے ہے یعنی دباؤ ایسے بدلتا ہے جیسے اس کی کثافت۔

اس قانون کو پہلے بال نے بیان کیا لیکن یہ اس عام قانون کے نتیجے کے طور پر اخذ ہو سکتا ہے کہ گیسوں کے کسی آمیزے کا دباؤ جبکہ ان میں کیمیائی عمل نہ ہوتا ہو ایسے دباؤں کا مجموعہ ہوتا ہے جو کہیں علیحدہ علیحدہ پیدا کرتی ہیں جبکہ ایک ایک کر کے جدا گانہ طور پر برتن کو ان سے بھرا جائے کیونکہ برتن میں گیس کی مقدار کو دو چند کرنے سے دباؤ بھی دو چند ہو جائیگا اور سیال کے مقدار میں کوئی اور اس قسم کی تبدیلی دباؤ میں اس طرح کی متناسب تبدیلی پیدا کر دیگی۔

اسلئے اگر کسی گیس سیال کی کچھ مقدار کی کثافت ت ہو اور اس کا دباؤ د توجہ تک کہ تپش وہی رہے

$$d = m \cdot t$$

جہاں m مستقل ہے جبکہ تجربہ کے ذریعہ اس مخصوص سیال کے لئے کسی معلومہ تپش پر معلوم کرنا ہوگا۔ اگر گیس کا حجم ح ہو جبکہ اس کا دباؤ د ہے اور ح جبکہ دباؤ د ت تو

$$d = \frac{d}{H} \cdot H$$

لہذا کچھ سیالی اوقات کی اس خاصیت کے عمل استعمال کی ایک اچھی مثال ہے۔

یعنی ح د معلومہ پیش پرستقل ہے۔  
 ۱۱۔ دباؤ کے چھوٹے اضافہ کو جو نسبت اُس لمبائی (جی) پر چمک سے ہو جو اس قلیل اضافہ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اُس سے سیال کی لمبائی کی پیمائش کی جاتی ہے۔  
 اگر ح حجم ہو تو خفیف لمبائی پر چمک - فرج ہوگی اور چمک کا ناپ

$$- \text{ح} = \frac{\text{فرج}}{\text{فرج}}$$

ہوگا۔ مستقل پیش پرگیس کی صورت میں ح د مستقل ہوتا ہے اور

$$\therefore \text{د} + \text{ح} = \frac{\text{فرج}}{\text{فرج}} = ۰$$

اس طرح چمک کا ناپ وہی ہو جو دباؤ کا ناپ ہے۔  
 اگر چمک اور دباؤ میں ربط معلوم ہو تو ہم دباؤ اور حجم میں ربط معلوم کر سکتے ہیں۔  
 مثلاً اگر ہم ایک ایسے سیال کے وجود کا تصور کر سکیں جس میں چمک دباؤ کی دو چند ہو تو ہمیں ربط

(۱۶)

$$- \text{ح} = \frac{\text{فرج}}{\text{فرج}} = ۵۲$$

حاصل ہوتا ہے۔ جس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ د ح مستقل ہے۔

وزن کمیت اور کثافت کے پیمانے

۱۲۔ سیال کے وزن، کمیت اور کثافت کے پیمائش اسی طرح کی جاتی ہے جیسے ٹھوس اجسام کی صورت میں۔

اگر کمیت کے سیال کا وزن و ہو تو حسب معمول قدر دو دوں کے مطابق جن سے کمیت اور قوت کی اکائیاں معرض تعریف میں آتی ہیں

$$\text{و} = \text{ک} \times \text{ج}$$

اگر کمیت کے سیال کی کثافت ث اور حجم ہو تو

$$\text{ک} = \frac{\text{ث}}{\text{ج}}$$

اور  $\rho = \frac{W}{V}$  ث ح

معیاری چیز کے لئے  $\rho = 1$  اور اس لئے کثیت کی اکائی معیاری چیز کے اکائی حجم کی کثیت ہے اگر کثیت کی اکائی پونڈ ہو تو مساوات  $\rho = \frac{W}{V}$  گ کج سے ظاہر ہے کہ ایک پونڈ پر جاؤ بارض کا عمل قوت کی ج اکائیوں کے مساوی ہے۔ اس لئے قوت کی اکائی تقریباً نصف اونس کے وزن کے مساوی ہے اور اس کو پونڈل کہتے ہیں۔

۱۳۔ گزشتہ دفعات میں ایسے سیالوں پر غور نہیں کیا گیا جنکی کثافت متغیر ہوتی ہے لیکن سمجھنا آسان ہے کہ مائع کی کثیت کی کثافت مسلسل طور پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتی ہے۔ اور آئندہ معلوم ہو گا کہ ایک چکدر سیال کی کثیت جو جاؤ بارض کے زیر عمل ساکن ہے اور جس کے تمام جثہ میں تپش مستقل ہے لازماً غیر متجانس ہونی چاہیے۔ اس لئے سیال کے کسی نقطہ پر کثافت کی پیمائش اس نقطہ پر بادوبی یا کسی مسلسل طور پر بدلنے والی مقدار کی پیمائش کی طرح ہونی چاہیے۔

### غیر متجانس سیال کے کسی نقطہ پر کثافت کی پیمائش

فرض کرو کہ ایک نقطہ کے گھیرنے والے کچھ سیال کا حجم  $V$  ہے اور کثیت  $\rho$  نیز فرض کرو کہ  $\rho$  ایک متجانس سیال کی کثافت ہے جسکے  $V$  حجم کی کثیت  $\rho$  ہے یا جعین

$$\rho V = W$$

تو  $\rho$  کو  $V$  حجم والے غیر متجانس سیال کے اس حصہ کی اوسط کثافت کہا جاسکتا ہے اور بالآخر جبکہ  $V$  لا انتہا کم کر دیا جائے مگر یہ ہمیشہ نقطہ کو گھیرے ہوئے ہے تو  $\rho$  کو اس نقطہ پر سیال کی کثافت کہا جاسکتا ہے۔

۱۴۔ گیس کے دبانے میں جو کام ہوتا ہے اسکو معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ  $d$  باؤر گیس کا حجم  $V$  ہے۔ اور جس برتن میں گیس ہے اس کی سطح کا جز فرس اور سطح فرس کے اندر دار عماد کا جز  $dz$  فرس ہے۔

تو چھوٹے چمکاؤ میں جو کام کیا گیا اس کی مقدار ہے

$$dW = p \, dV$$

اور حجم  $V$  سے  $V$  میں دبانے کے لئے جو کام کیا گیا وہ

$$= - (د فرح = - کر م فرح) اگر ح د = م$$

$$= م لوک \frac{ح}{ح} = ح د لوک \frac{ح}{ح}$$

اگر چمک برتن کے گرو کے ہوائی کرہ کے موجودگی میں وقوع پذیر ہوئی ہے مثلاً اگر ایک اسطوانہ میں فشار سے کے ذریعہ گیس بند کی گئی ہو تو ہوائی کرہ کا دباؤ پچمک کے کام میں مدد دیتا ہے - اس طرح اگر کرہ ہوائی کے دباؤ پر ابھرتی ہے۔ حجم ح ہو تو حجم ح میں دبانے کے لئے بیرونی کام ہو گیا اور

$$= - (د - م) فرح ، جہاں ح د = ح$$

$$= م لوک \frac{ح}{ح} - م (ح - ح)$$

### امثلہ

(ان مثالوں میں ج ۲ کے مساوی دیا گیا ہے جبکہ فٹ اور ثانیہ اکائیاں ہوں)  
۱۔ مستطیلی رقبہ ۱ ب ج د سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے۔ ۱ ب ثابت خط مستقیم ہے۔ اور رقبہ پر کا دباؤ طول ب ج (لا) کا ایک دیا ہوا تفاعل (د) ہے ثابت کر د کہ ج د کے کسی نقطہ پر دباؤ  $\frac{د}{ب}$  ہے جہاں ۱ = ۱ ب -

اگر ۱ ایک ثابت نقطہ ہو اور ۱ ب ، ۱ د کی سستیں ثابت ہوں اور اگر ۱ ب = لا اور ۱ د = لا تو ج پر دباؤ  $\frac{د}{ب}$  فرلاؤ فرما

۲۔ مساوات ۱ = ج ث ح میں اگر قوت کی اکائی ۱۰۰ پونڈ وزن طول کی اکائی ۲ فٹ اور وقت کی اکائی ۱۰ ثانیہ ہو تو پانی کی کثافت معلوم کرو۔

۳۔ اگر وقت کی اکائی ایک دقیقہ طول کی اکائی ایک گز ہو، اور اگر معیاری شے کے ۱۵ مکعب انچ کا وزن ۲۵ اونس ہو تو قوت کی اکائی درجہ فٹ کرو۔

۴۔ مساوات ۱ = ج ث ح میں وقت کی اکائی میں ثانیوں کی تعداد طول کی اکائی میں فٹوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ قوت کی اکائی ۵۰ پونڈ وزن ہے اور معیاری چمک کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱۳۵۰۰ اونس ہے۔ وقت کی اکائی ماہم کرو۔

- ۵۔ رفتار کی اکائی ہفت فی ثانیہ ہے پانی معیاری چیز ہے اور قوت کی اکائی ۱۲۵ پوند وزن ہے۔ وقت اور طول کی اکائیاں معلوم کرو۔
- ۶۔ پانی کے ایک کعب ہفت کے وزن کو تعبیر کرنے والا عدد اس کے حجم کو ظاہر کرنے والے عدد کا ۱/۲۵ اور اس کو ایک ہفت اٹھانے میں کئے گئے کام کو ظاہر کرنے والے عدد کا ۱/۲۵ ہے۔ طول، کمیت اور وقت کی اکائیاں دریافت کرو۔
- ۷۔ اگر گرہ ہوائی کا دباؤ دباؤ کی ایکائی، آواز کی رفتار، رفتار کی اکائی، اسراع بہ جاذبہ ابض اسراع کی اکائی ہو تو قوت کی اکائی تقریباً معلوم کرو۔
- ۸۔ اگر گرافٹ اور ب ثانیہ طول اور وقت کی اکائیاں ہیں اور پانی کی کثافت معیاری کثافت ہو تو اور ب میں ربط معلوم کرو کہ مساوات  $W = \rho \times V$  سے کسی چیز کا وزن پونڈوں میں معلوم ہو سکے۔
- ۹۔ ۸ ہفت فی ثانیہ کی رفتار رفتار کی اکائی اور گرنے والے جسم کا اسراع اسراع کی اکائی اور ایک ٹن کمیت کی اکائی ہو تو پانی کی کثافت معلوم کرو۔
- ۱۰۔ کچھ مانع ایک مخروط میں جس کا محور انتہائی اور اس نیچے کی طرف سے ڈال دیا گیا ہے۔ اس مانع کے کسی نقطہ پر کثافت سطح پر کی کثافت سے بقدر ایک ایسی مقدار کے بڑی ہے جو ایسے بدلتی ہے جیسے سطح سے نقطہ کی گہرائی۔ ثابت کرو کہ جب مانع کو ملانے سے اس کی کثافت یکساں ہو جائے تو یہ کثافت اصلی حالت میں اس نقطہ پر کی کثافت کے مساوی ہے جس کی گہرائی مخروط کے محور کی ایک چوتھائی کے مساوی ہو۔
- ۱۱۔ کثافت والے مانع سے بھرے ہوئے برتن میں سے مانع کا  $1/4$  حصہ نکال دیا گیا ہے اور اس کو نہ کثافت والے مانع سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر اس عمل کو م مرتبہ دہرایا جائے تو برتن میں کے مانع کی کثافت معلوم کرو۔
- ۱۲۔ ایک برتن کا حجم  $H$  ہے۔ اس کو کثافت والے مانع سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر نہ کثافت والے مانع کا حجم انتہائی صغیر تپڑوں میں اس کے اندر ٹپک جائے تو حاصل شدہ مانع کی کثافت معلوم کرو۔
- ۱۳۔ ایک مانع کی کثافت نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک معلوم نقطہ میں سے

گزرنے والی سمتوں میں سے اُس سمت میں کثافت زیادہ سے زیادہ سرعت سے بلیتی ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والی یکساں کثافت والی سطح پر عماد ہو۔ نیز اس سطح کے ماسی مستوی میں جو سمتیں ہیں اُن میں سے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کثافت کے تغیر والی سمتیں وہ ہیں جو صدری تراشوں کے ماسوں پر منطبق ہوتی ہیں۔





## باب دوم

### سیالوں کے توازن کی شرطیں

۱۵۔ عام سے عام صورت میں فرض کرو کہ ایسے سیال کی کچھ کمیت جو پچک دار ہو یا بے پچک منجائس ہو یا غیر تنجائس، وی ہوئی تو توتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور فرض کرو کہ توازن کی شرطیں اور کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ سیال کے کسی نقطہ کے محدود علی القوائم محوروں کے لحاظ سے لا مائی ہیں۔ اور قی اس کے نزدیک ایک ایسا نقطہ ہے کہ ن ق محور لا کے متوازی ہے فرض کرو کہ لا + مف لا مائی نقطہ ق کے محدود ہیں۔ ن ق کے گرد ایک چھوٹا منشور یا اسطوانہ بناؤ جو ن ق پر کی علی القوائم مستویوں سے محدود ہو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ نقطہ ن پر کا دباؤ د اور نقطہ ق پر کا دباؤ د + مف د ہے۔

اب چونکہ بہت چھوٹا ہے، اس لئے مستوی ن پر کے کسی نقطہ پر دباؤ تقریباً د کے مساوی ہوگا اور اس لئے اسپر کا دباؤ

$$(د + ج) ع$$

ہوگا جہاں جہ بمقابلہ د کے صفر ہو جاتا ہے جبکہ کو لا انتہا کم کیا جائے اس لئے کہ ع کو ہم اس قدر چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ بمقابلہ د کے جہ نظر انداز ہو سکے۔ اور اسطوانہ کے رخ ن پر کا دباؤ د ع کے مساوی لیا جاسکے۔ اور اسی طرح رخ ق پر کے دباؤ کو لے سکیں

$$(د + مف د)$$

اگر اسطوانہ ن ق کی وسط کثافت ث ہو تو اسکی کمیت = ث ع مف لا اور

لاٹ عہد مع لاسے وہ قوت تقییر ہوگی جو ن ق پر اسکے محور کے متوازی عمل کرتی ہے  
جہاں لاٹ مع ک، مامع ک، سے مع ک سیال کے ذرہ مع ک پر جو (لا، ما، ی)  
پر واقع ہے عمل کرنیوالی قوتوں کے اجزاء کے تخلیلی ہیں۔  
اس لئے ن ق کے توازن کے لئے

$$(د + مع د) - د = لاٹ عہد مع لا$$

$$مع د = لاٹ عہد$$

انتہائی نسی جبکہ مع لا اور اس لئے مع د لا انتہا کم کر دئے جائیں نقطہ ن پر کی  
کثافت ت ہوگی اور ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{جف د}{جف لا} = لاٹ عہد$$

$$جف د = لاٹ عہد$$

$$\frac{جف د}{جف ی} = لاٹ عہد$$

$$لیکن فرد = \frac{جف د}{جف لا} فرلا + \frac{جف د}{جف ما} فرما + \frac{جف د}{جف ی} فری$$

$$\therefore فرد = لاٹ (فرلا + فرما + فری) \dots\dots\dots (عہد)$$

اس مساوات سے دباؤ معلوم ہو جاتا ہے۔

۱۶۔ صریحاً دباؤ متغیروں لا، ما، ی کا تفاعل ہے۔ اور ہم جانتے ہیں کہ

لہ ثبوت بالامیں عہد اس قدر چھوٹا یا گیا ہے کہ اس کے خطی ابعاد بمقابلہ مع لاسے کے نظر انداز کئے جاسکیں  
یعنی لا کی تبدیلی مع لاسے کے جواب میں دباؤ د میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس پر لا، ی کے اس  
بدلنے سے اثر نہیں پڑتا۔

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی جف}^{\text{ا}} \text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی جف}^{\text{ا}} \text{ما}}$$

اس لئے گزشتہ مساواتوں سے ہمیں مندرجہ ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$(ب) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \quad (\text{ث ما}) \\ \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \quad (\text{ث ی}) \\ \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \quad (\text{ث لا}) \end{array} \right.$$

جن سے

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \text{ث} \left( \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \right)$$

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \text{ث} \left( \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \right)$$

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} = \text{ث} \left( \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \right)$$

لا، ما، ی سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} + \left( \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \right) =$$

$$+ \left( \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ما}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} - \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ی}} \right) = \dots \dots \dots (ج)$$

جو توازن کے لئے ضروری شرط ہے۔

اس مساوات کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ قوت کے خطوط

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرما}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فر}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$$

سطحوں کے ایک نظام سے علی القوام قطع ہو سکتے ہیں۔

۱۷۔ متجانس ثنائیات اگر سیال متجانس اور بے پچک ہو تو لا فرلا + فرما + فری پر الفرقہ ہونا چاہیے تاکہ توازن ممکن ہو سکے۔

(۱۲)

بالفاظ دیگر ذرات کا نظام محفوظ یا بقائی ہونا چاہیے اور قوتوں کی تعبیر قوتہ تفاعل کے مکانی تغیرات سے ہونی چاہیے۔

اگر قوتہ تفاعل ہو تو

$$\text{فرد} = \text{ت} + \text{فر}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{ت}}{\text{فر}} + \text{ف} = \text{م (مستقل)}$$

مثلاً اگر قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف یا ان کے باہر وار عمل کر نیوالی ہوں اور وہ ان مرکزوں کے فاصلوں کی تفاعل ہوں تو

$$\left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{لا} \quad \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{ما} \quad \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{مے}$$

جہاں (ا، ب، ج) اس مرکز کے محدود ہیں جہاں قوت ف (ر) مائل ہے۔

$$\text{اب} \quad \text{ر} = (\text{لا} - \text{ا}) + (\text{ما} - \text{ب}) + (\text{مے} - \text{ج})$$

$$\text{لا فرلا} + \text{فرما} + \text{فری} = \text{ف} (ر) \text{ فرد}$$

$$\text{اور} \quad \text{فرد} = \text{ت} + \text{فر} \text{ ف} (ر) \text{ فرد}$$

اس صورت میں چونکہ

$$\left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{جف لا} \quad \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{جف ما} \quad \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{جف مے}$$

$$\left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{جف لا} \quad \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{جف ما} \quad \left\{ \frac{\text{ف}}{\text{ر}} \right\} = \text{جف مے}$$



$$م \frac{ف}{د} = ح \text{ ف } ( ر ) \text{ فر }$$

اختیار کرتی ہے اور د کا تعین ہو سکتا ہے۔  
اگر تپش متغیر ہو تو د باؤ تپش اور کثافت میں یہ ربط

$$د = م \text{ ت } ( ۱ + ع \text{ ت } )$$

ہوتا ہے جہاں تپش ت مئی تپش پیا سے ناپی گئی ہے اور ع = ۰۰۳۶۶۵ ،  
اس سے ہمیں حاصل ہوگا

$$د = م \text{ ت } ع \left\{ \frac{۱}{ع} + ت \right\} = ح \text{ ت } ت$$

جہاں ح = م ع ، اور ت =  $\frac{۱}{ع} + ت$  ، ت کو تپش مطلق کہتے ہیں  
جس کا صفر ۰۲،۳ مئی پر ہوتا ہے۔

$$\text{اس صورت میں } \frac{ف}{د} = \frac{\text{لا فر لا} + \text{ما فر ما} + \text{ے فر ی}}{\text{ح ر ت}}$$

اور اس لئے ت تفاعل ہونا چاہیئے لا ، ما ، ی کا۔  
ان میں سے کسی صورت میں اگر کسی خاص نقطہ پر کا دباؤ دیا جائے تو مستقل دریافت  
ہو سکتا ہے۔

پچکارسیالوں کی صورت میں اگر سیال کی کثیت اور وہ جگہ جس میں محدود ہے معلوم ہوں  
تو مستقل معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۔ د دریافت کرنے کی مسادات طریقہ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔  
فرض کرو کہ ن ق ایک بہت چھوٹے اسطوانہ کا محور ہے جو ن ق بر کے علی التعمیم  
مستویوں سے گھرا ہوا ہے۔

فرض کرو کہ د اور د + م ف د نقاط ن اور ق پر کے دباؤ ہیں۔ سطحی تراش  
کا رقبہ ہے اور م ف س ، ن ق کا طول ہے اب اگر سمت ن ق میں ذرہ م ف ک  
بر عمل کر نیوالی قوتوں کا جزو تخیلی م ف م ف ہو تو

$$(د + مٹ د) - د = مٹ = مٹ مٹ مٹ مٹ$$

اور اس لئے انتہا لینے سے

(۱۴)

$$فرد = مٹ مٹ مٹ$$

یعنی کسی سمت میں دباؤ کے اضافہ کی شرح دو مقداروں کا حاصل ضرب ہے۔ ایک مقدار کثافت ہے اور دوسری مقدار قوت کا وہ جزو تحلیل ہے جو اس سمت میں عمل کرتا ہے۔ اگر نقطہ ن کے محدود لا، ماما می اور مٹ کے اجزائے تحلیل محوروں کی سمت میں لا، ما، مے ہوں تو

$$مٹ = لا \frac{فرد}{مٹ مٹ} + ما \frac{فرد}{مٹ مٹ} + مے \frac{فرد}{مٹ مٹ}$$

اور فرد = مٹ (لا فرد + ما فرد + مے فرد) بوجہ دفعہ ۱۵  
اگر نقطہ ن کا مقام اسطوانی محدودوں (ر، ط، ی) کے لحاظ سے دیا جائے اور اگر قوت مٹ کے اجزائے تحلیل (ر، ط، ی) کی سمتوں میں ق، ت، مے ہوں تو

$$مٹ = ق \frac{فرد}{مٹ مٹ} + ت \frac{فرد}{مٹ مٹ} + مے \frac{فرد}{مٹ مٹ}$$

اور د کی مساوات ہو جاتی ہے

$$فرد = مٹ (ق فرد + ت فرد + مے فرد)$$

پھر اگر ن کا مقام قطبی محدودوں (ر، ط، ی) کے لحاظ سے دیا جائے اور قوت کے اجزائے تحلیل (ر، ط، ی) ہوں جو علی الترتیب ر کی سمت میں زاویہ ط والے مستوی کے عمود کی سمت میں اور اس مستوی میں ر پر کے عمود کی سمت میں تحلیل کئے گئے ہیں تو معلوم ہوگا کہ

$$\frac{فرد}{د} = سر فرد + ن رجب ط فرد + ت رجب ط$$

اسی طرح فرد کے لئے جاکسی اور محدودوں کے نظام میں معلوم ہو سکتا ہے۔  
۲۱۔ مسادہ دباؤ کی سطحیں۔ تمام صورتوں میں جن میں کہ سیال کا توازن ممکن ہوگی  
سے حاصل ہوگا

$$د = (لا، ما، ی)$$

اگر مستقل ہو تو  $د = (لا، ما، ی)$  ..... (۱)  
جو ایسی سطح کی مساوات ہے جس کے تمام نقطوں پر دباؤ مستقل ہے اور جس میں دو مختلف  
قیمتیں دیئے سے مساوی دباؤ کی سطحوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے۔ نیز د کو سیال کے بیرونی  
دباؤ کے مساوی رکھنے سے بیرونی سطح یا آزاد سطح حاصل ہوتی ہے۔  
اگر بیرونی دباؤ صفر ہو تو آزاد سطح ہوگی

$$د = (لا، ما، ی) = -$$

مقادیر

$$\frac{جف د}{جف لا} ، \frac{جف د}{جف ما} ، \frac{جف د}{جف ی}$$

جو سطح (۱) کے نقطہ (لا، ما، ی) کے عماد کی سمتی جیوب التمام کے تناسب ہیں ان ترتیب

$$\frac{جف د}{جف لا} ، \frac{جف د}{جف ما} ، \frac{جف د}{جف ی}$$

کے مساوی ہیں یعنی  $ث لا ، ث ما ، ث ی$  کے مساوی ہیں اور اس لئے  
لا، ما، ی کے متناسب ہیں۔

اس لئے کسی نقطہ پر کی حاصل قوت اس عماد کی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس نقطہ میں  
سے گزرنے والی مساوی دباؤ کی سطح پر اس نقطہ میں سے کھینچا گیا ہے۔

(۱۵)

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں وہ ہیں جو قوت کے خطوط کو علی القوائم قطع کرتی ہیں۔  
اس نتیجہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ توازن کے لئے ضروری شرط ایسی سطحوں کے نظام کا  
وجود ہے جو خطوط قوت کو علی القوائم قطع کرتی ہیں۔ یہ نتیجہ ذبحہ (۱۴) کی مساوات (ج) سے  
بھی حاصل ہو سکتا ہے۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ اس قسم کے نظام کے وجود کے لئے مساوات  
مذکورہ ضروری تحلیل کی شرط ہے۔

۲۲۔ اگر سیال متجانس مانع ہو یعنی اگر  $ث مستقل$  ہو تو  $لا فر لا + ما فر ما + ی فر ی$  پورا  
تفرقہ ہونا چاہیے۔ یا بالفاظ دیگر قوتوں کا نظام تحفظی با بقائی ہونا چاہیے۔

عام صورت میں اگر قوتوں کا نظام بقائی ہو تو  $ث کو لا زما تو دفر کا تفاعل ہونا چاہیے$



کیونکہ فرد = ث فرقہ اور فرد پورا تقرقہ ہے۔ اسلئے ث کو قوہ ذ کا تفاعل ہونا چاہیئے۔ اس طرح ذ اور اس لئے ث د کے تفاعل ہیں اور مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی قوہ کی سطحیں بھی ہیں اور مساوی کثافت کی سطحیں بھی۔  
اگر سیال یکساں ہو اور ہمیشہ متغیر قوہ

$$\frac{فرد}{د} = - \frac{فرقہ}{ث}$$

اس طرح، اسی قسم کے عمل استدلال سے، ت، د کا تفاعل ہے اور مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی تمپش کی سطحیں بھی ہیں۔  
لیکن اگر کلا فرلا + مافرا + مے فری پورا تقرقہ نہ ہو تو یہ سطحیں عام طور پر منطبق نہ ہوں گی۔  
فرض کرو کہ سیال غیر متجانس اور بے پیمائش ہے تو مساوی دباؤ کی اور مساوی کثافت کی سطحیں حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

(۱۶)

۱۵ یہ نتیجہ طریقہ ذیل سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں۔

قریب کی دو مساوی دباؤ کی سطحوں پر غور کرو۔ جن کے درمیان سیال کی ایک تہ ہے اور فرض کرو کہ ایک سطح کے نقطہ ن کے گرو ایک چھوٹا دائرہ بنایا گیا ہے اور اس کے محیط میں سے گزرنے والے عمادوں سے سیال کا کچھ حصہ علیحدہ کر لیا گیا ہے۔ سیال کا یہ حصہ قوت عامل ان کے سروں اور محیط پر کے دباؤ کے زیر عمل ساکن ہے اب چونکہ تقریباً یہ بہت چھوٹا اسطوانہ ہے اور اس کے محیط پر کے تمام نقطوں پر دباؤ مساوی ہیں۔ اس لئے دونوں رخوں پر کے دباؤں کا فرق قوت عاملہ کی وجہ سے پیدا ہونا چاہیئے جو اس لئے اُس سمت میں عمل کرتی ہے جس سمت میں کہ یہ دباؤ عمل کرتے ہیں یعنی نقطہ ن پر کے عماد کی سمت میں۔

اگر تو میں ایک تودہ حاصل ہو سکیں تو حاصل قوت ہم قوہ سطحوں کے علی التوا اٹھ ہوگی اور اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں ہم قوہ سطحوں پر منطبق ہوگی۔

پھر اس عنصری اسطوانہ کے توازن پر غور کرنے سے عمل کرنیوالی قوت فی اکائی کیت =  $\frac{قواں کا فرق}{مساوی دباؤ کی سطحوں کا درمیان فاصلہ}$  اس لئے کثافت اور چونکہ اس عنصر کی کیت بالازست اس فاصلہ کے متناسب ہے اس لئے کثافت مستقل ہونی چاہیئے یعنی مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کثافت کی سطحیں بھی ہوتی ہیں۔

فرد = ' فرٹ = .

یعنی لا فلا + ما فرما + مے فری = .

$$\frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ فرما}}{\text{جفٹ فرما}} + \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} = . \dots (ب)$$

اس لئے یہ ایسی سطحوں کی تفرقی مساواتیں ہیں جو اپنے باہمی تقاطع سے مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے منحنیوں کا تعین کرتی ہیں۔

(ب) سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{فری}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} - \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} - \frac{\text{جفٹ مے فرما}}{\text{جفٹ مے فرما}} - \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} = . \dots (ج)$$

لیکن شرائط توازن سے

$$\begin{aligned} \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} &= \frac{\text{جفٹ مے فرما}}{\text{جفٹ مے فرما}} + \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} + \frac{\text{جفٹ مے فرما}}{\text{جفٹ مے فرما}} \\ \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} + \frac{\text{جفٹ مے فرما}}{\text{جفٹ مے فرما}} &= \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} + \frac{\text{جفٹ مے فرما}}{\text{جفٹ مے فرما}} + \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} \\ \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} + \frac{\text{جفٹ مے فرما}}{\text{جفٹ مے فرما}} &= \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} + \frac{\text{جفٹ مے فرما}}{\text{جفٹ مے فرما}} + \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} \end{aligned}$$

اور اس لئے مساواتیں (ج) ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{فری}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} - \frac{\text{جفٹ مے فرما}}{\text{جفٹ مے فرما}} - \frac{\text{جفٹ مے فری}}{\text{جفٹ مے فری}} = . \dots (د)$$

جو مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے منحنیوں کی تفرقی مساواتیں ہیں۔

۲۴ — اب ہم ایک محدود کمیت کے سیال کے توازن پر غور کرنے سے یہ بتائیں گے کہ

کس طرح دباؤ کی اساسی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔  
 فرض کرو کہ سیال میں ایک بند سطح ہے جس پر کسی نقطہ پر بیرونی عماد کے قی جیوب انعام ل، م، ن ہیں۔ سطح سے گزرنے والے سیال ہے اس کی کمیت کے توازن کی شرطوں کو اختصاراً یوں بیان کر سکتے ہیں کہ حدود پر کے عمادی دباؤ کمیت پر عمل کر نیوالی قوتوں کا توازن کرتے ہیں۔ اس طرح محور کے متوازی تحلیل کرنے سے ہمیں شکل ذیل کی تین مساواتیں ملتی ہیں۔

$$(1) \quad \text{فرس} = \text{لا فرما فری} \dots\dots\dots$$

(۱۷) اور محوروں کے گرد معیار لینے سے ہمیں شکل ذیل کی مزید تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

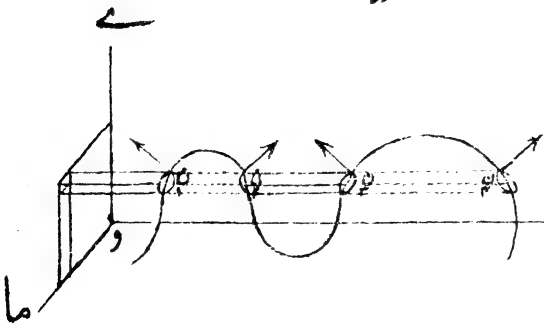
$$(2) \quad \text{لا (ن-م) فرس} = \text{لا (م-ی) فرما فری} \dots\dots\dots$$

جہاں دوسرے مکمل کل سطح سے پر اور تہرے مکمل کل بند فضا میں لئے گئے ہیں۔

اب ہم  $\text{لا جفت لا}$  فرما فری پر غور کر جس کے حدود مکمل دی ہیں۔ محور کے متوازی

ایک پلان مشورہ جو لازماً سطح کو جفت مرتبہ قطع کرے گا۔ فرض کرو کہ پینڈو نقاط ن، ن، ن، ..... پر سطح کے جزا فرس، فرس، فرس، ..... قطع کرتا ہے اس مشورہ کے ساتھ ساتھ مکمل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$(3) \quad \text{لا جفت لا} \text{ فرما فری} = \text{لا فرما فری} \dots\dots\dots$$



جانبی تکمیل حدود  
 ن، تا ن  
 اور ن، تا  
 ن، وغیرہ  
 کے درمیان  
 لیا گیا  
 ہے۔

لیکن اگر طہ، طہ، طہ ..... نقاط 'ن'، 'ن'، 'ن' ..... کے باہر دار عمادوں کے میلان محور لاکے ساتھ ہوں تو

$$\text{فرافری} = - \text{فرس} \text{ جم طہ} = \text{فرس} \text{ جم طہ} = - \text{فرس} \text{ جم طہ} = \dots$$

$$= - \text{ل فرس} = \text{ل فرس} = - \text{ل فرس} = \dots$$

علامت منفی یا مثبت ہوگی بوجب اس کے کہ زاویہ منفی جہ یا عاودہ ہو یعنی بوجب اس کے کہ منشور میدان تکمل میں داخل یا اس سے خارج ہو رہا ہو۔

اس لئے (۳) میں حدود پر کی قیمتیں رکھنے سے

$$\text{لا لا جف د} \text{ لا جف د} = \text{لا لا جف د} = \text{لا لا جف د} + \text{لا لا جف د} + \dots$$

$$= \text{لا لا جف د} + \dots$$

$$= \text{لا لا جف د} \text{ پوری سطح پر} \dots (۴)$$

اس قیمت کو (۱) میں استعمال کرنے سے مساوات

$$\text{لا لا جف د} - \text{ث لا} = \text{لا لا جف د}$$

(۱۸) حاصل ہوتی ہے اور نیز اسی طرح کی دواور مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور چونکہ یہ سیکلے سیال میں تکمل کی تمام سمتوں یعنی تمام بند سطحوں کے لئے معدوم ہوتے ہیں اس لئے ہر نقطہ پر ان کے متکمل صفر ہونے چاہئیں اس لئے

$$\text{جف د} = \text{ث لا}، \text{جف د} = \text{ث ما}، \text{جف د} = \text{ث عے} \dots (۵)$$

جس سے پہلے کی طرح

$$\text{زد} = \text{ث} (\text{لا فلا} + \text{ما فرما} + \text{عے فری})$$

ہم نے شکل (۲) کی میٹروں والی مساواتوں کو ابھی تک استعمال نہیں کیا لیکن ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ وہ بھی مساواتوں (۵) سے پوری ہوتی ہیں۔ مثلاً

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

پر غور کرو۔ اگر ہم اسی منشور پر پہلے کی طرح تکمیل کریں اور اس کا خیال رکھیں کہ منشور پر مستقل ہے تو ہمیں حدود  $N$  اور  $N$ ،  $N$  اور  $N$  وغیرہ کے درمیان تکمیل کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

اور اوپر کی طرح یہ  $\frac{J}{J}$  مافرس کے مساوی ہے جس میں پوری سطح تکمیل لیا گیا ہے۔ یعنی مساوات (۴) اس حالت میں بھی درست رہتی ہے جبکہ ہم تکمیل میں  $(Y)$  (یا  $Y$ ) جزو ضروری کے طور پر مساوات کی طرف میں شامل کر دیں۔ اسی طرح گے استدلال سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

اور مساوات (۵) سے اندراج کرنے سے یہ ہوتا ہے

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

اس طرح (۲) کی تصدیق ہوتی ہے۔

یہ یاد رہے کہ چونکہ سیال کامل، قرضی یا جذبی زور کی مزاحمت کے ناقابل ہوتا ہے اسلئے اس قسم کے زور متوازن سیال کی کمیت کے اندر نہیں بائے جاسکتے۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ محوروں کے گرو میٹا لینے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں وہ لازماً پوری ہونی چاہئیں جبکہ محوروں کے متوازی قوتوں کو تسلیل کرنے سے حاصل شدہ مساواتیں پوری ہوں۔ کیونکہ توازن کی صورت میں موخر الذکر مساواتیں سیال کے کسی محدود یا صغیر جز کے لئے درست ہوتی ہیں اور قوتوں کے اسی توازن سے لازم آتا ہے کہ میٹروں کی مساواتیں بھی درست ہوں۔

۲۴۔ سیال کے کردی عنصر کے توازن پر غور کرنے سے ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{J}{J} = \frac{J}{J} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

کیونکہ اس عنصر کی سطح پر کے سیالی دباؤ تمام کے تمام مرکز کی سمت میں عمل کرتے ہیں اور اسلئے عمل کرنیوالی قوتوں کا معیار مرکز کے گرد معدوم ہونا چاہیئے۔  
فرض کرو کہ مرکز کے محدود لا، ما، ی اور اس چھوٹے کرہ کے اندر کسی نقطہ کے محدود لا، ع، ما، یہ، ی + چہ ہیں۔

(۱۹)

اب چونکہ مرکز پر کی کثافت ث ہے اسلئے جلد ۳ فرم (ے بہ۔ ما جہ) ہو جاتا ہے  

$$\left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$$

$$\left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$$

اب  $\left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$  کیونکہ کرہ کا مرکز حجم کا مرکز ثقل ہے  
 اسی طرح  $\left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$  اور اگر فرتہ = فرعہ فرجہ فرجہ،

$$\text{تو } \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)} = \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$$

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$$

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$$

اس طرح اگر ع، بہ، جہ کی اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کر دیا جائے تو معیار کا جلد ہو جائیگا۔

$$\left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)} = \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right\} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$$

اور چونکہ یہ سفر ہو جاتا ہے اس لئے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \text{ (ے بہ۔ ما جہ)}$$

۲۵۔ جاؤ بہ ارض کے زیر عمل ساکن سیال۔  
محوری کو انتہائی بیکری نیچے کی طرف ناپنے سے

$$\text{لا} = \text{ما} \cdot \text{ے} = \text{ج}$$

اور دفعہ (۱۵) کی مساوات (ع) ہو جاتی ہے

$$\text{فرد} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{فری}$$

جبکہ ایک انتصابی چھوٹے اسطوانے کے توازن پر غور کرنے سے بھی بلا واسطہ حاصل کر سکتے ہیں۔

متجانس سیال کی صورت میں

$$\text{د} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{ی} + \text{ہر}$$

اور مساوی دباؤ کی سطحیں افقی مستوی ہیں۔

اس لئے آزاد سطح افقی مستوی ہے اور اس لئے مبداء کو آزاد سطح میں اور  $\pi$  کو بیرونی دباؤ قرار دینے سے

$$\text{د} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{ی} + \pi$$

اگر آزاد سطح پر کوئی دباؤ نہ ہو تو

$$\text{د} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{ی}$$

یعنی کسی نقطہ پر کا دباؤ آزاد سطح کے نیچے اس نقطہ کی گہرائی کے متناسب ہوگا۔

غیر متجانس سیال کی صورت میں مساوات

$$\text{فرد} = \text{ج} \cdot \text{ث} \cdot \text{فری}$$

سے ظاہر ہے کہ  $\text{ث}$  کو  $\text{ی}$  کا تفاعل ہونا چاہیے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک ہی افقی سطح کے تمام نقطوں پر کثافت اور دباؤ مستقل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر فرض کر دو کہ  $\text{ث} = \infty$   $\text{ی} = \text{م}$   $\text{ی} = \text{ن}$

$$\text{تو} \quad \text{د} = \text{ج} \cdot \frac{\text{ی}^{\text{ن}} + \text{ی}^{\text{م}}}{1 + \text{ن}} + \pi$$

۲۶۔ دو مائع جو باہم آمیز نہیں ہوتے ایک حصار ملی میں ڈالے گئے ہیں ثابت کر دو کہ انکی مشترک سطح سے آزاد سطحوں کے ارتقاع کثافتوں کے بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

مشترک سطح پر دباؤ وہی ہیں اور اگر مشترک سطح سے آزاد سطحوں کے ارتقاع  $\text{ی}$ ،  $\text{ی}$  ہوں اور کثافات کی کثافتیں  $\text{ث}$ ،  $\text{ث}$  ہوں تو یہ دباؤ علی الترتیب

$$\pi + \text{ج ث ی} = \pi + \text{ج ث ی}$$

$$\frac{\text{ج}}{\text{ث}} = \frac{\text{ی}}{\text{ث}}$$

ہونگے اس لئے

۲۷۔ یہ ایک مشہور قانون ہے کہ اگر جا ذبہ ارض اور چکنی سطحوں کے دباؤ کے زیر عمل کوئی نظام متوازن ہو تو توازن قائم ہوتا ہے بشرطیکہ مرکز ثقل نیچے سے نیچے مکن مقام میں واقع ہو۔ جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ غیر متجانس مائع کی صورت میں گہرائی کے ساتھ کثافت کو بڑھنا چاہیئے کیونکہ یہ صورت دیگر توازن غیر قائم ہوگا۔

اس طرح اگر ایک غیر متجانس مائع کو ایک برتن سے دوسرے برتن میں ڈالا جائے تو ہر بے وزنی تہ نیچے بیٹھ جائے گی اور قانون کثافت یقیناً بدلتا ہوگا۔

مائع کی کچھ مقدار جس کی کثافت گہرائی کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے مئے مئے برتن میں ہے۔ اگر اس مائع کو دوسرے برتن میں منتقل کیا جائے تو نئے قانون کثافت کا معلوم کرنا مطلوب ہے۔ جب کہ ہر برتن ایک گردش سطح کی شکل میں موجود محاورہ تصابی ہے۔

لا کو مائع کے زیر ترین نقطہ سے اوپر کی طرف ناپ کر فرض کر دو کہ  $\text{ما} = \text{ف} (\text{لا})$  پہلے برتن کا کوئی مہنی ہے اور  $\text{ما} = \text{فہ} (\text{لا})$  دوسرے برتن کا۔

پس اگر پہلے برتن میں لابلندی والی تہ دوسرے برتن میں لابلندی والی تہ کے متناظر ہو تو چونکہ حجم مساوی میں اسلئے ہیں حاصل ہوگا

$$\text{گ} \{ \text{ظہ} \} \text{فرظہ} = \text{گ} \{ \text{ظہ} \} \text{فرظہ}$$

اب عمل مکمل سے لا کو لا کی رقوم میں حاصل کر سکتے ہیں۔ اور اسلئے  $\text{ث}$  جو لا کا تفاعل ہے، لا کا نیا تفاعل بن جاتا ہے۔

نیز اگر ان دو برتنوں میں مائع کی گہرائیاں گ، گ ہوں تو گ کو گ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لئے کثافت  $\text{ث}$  گہرائی گ۔ لا کی رقوم میں معلوم ہو سکتی ہے اگر نیا قانون کثافت دیا جائے اور نئے برتن کی شکل معلوم کرنا مطلوب ہو تو ہم اس طرح عمل کرتے ہیں:-



کنفٹ چونکہ (گ - لا) کا اور نیز (گ - لا) کا دیا ہوا تفاعل ہے ہم ان دونوں جملوں کو مساوی رکھ کر لا کو لا کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں -  
 نیز متنناظر ہوں کے جملوں کو مساوی کر کے ہم ما فرلا = ما فرلا حاصل کرتے ہیں جس میں لا کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کر کے ہم مطلوبہ مساوات معلوم کر سکتے ہیں - اور پھر پورے جملوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھ کر گ کی قیمت معلوم کرتے ہیں -  
 مثال ۱ - ایک اسطوانی برتن میں مائع کی کنفٹ ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی قانون کنفٹ معلوم کرو اگر مائع کو ایک مخروطی برتن میں ڈالا جائے جسکا راس نیچے کی طرف ہو -  
 اس صورت میں

$$\text{ث} = \text{مہ} (\text{گ} - \text{لا})$$

$$\text{اور } \frac{\text{ث}}{\text{مہ}} = \frac{\text{لا}}{\text{گ}} \quad \text{نیز } \frac{\text{ث}}{\text{مہ}} = \frac{\text{لا}}{\text{گ}}$$

$$\therefore \text{ث} = \text{مہ} \times \frac{\text{لا}}{\text{گ}} = \frac{\text{مہ} \times \text{لا}}{\text{گ}} \quad (\text{گ} - \text{لا})$$

اگر گہرائی می ہو -

مثال ۲ - مائع کی کچھ مقدار جس کی کنفٹ ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی ایک اونڈے یا اٹھ مکائی نما میں دی ہوئی بلند ہی تک بہری ہوئی ہے ایک ایسے برتن کی شکل معلوم کرنا (جو گردش سطح کی شکل میں ہو) کہ اگر اس مائع کو اس میں ڈالا جائے تو کنفٹ ایسے بدلے جیسے گہرائی کا مربع -

اس صورت میں  $\text{ث} = \text{مہ} \times (\text{لا})^2$  (ف - لا) جہاں ف گہرائیاں ہیں -

$$\therefore \text{لا} = \text{ف} - \frac{\text{ث}}{\text{مہ}} \quad (\text{ف} - \text{لا})^2 \quad \text{اگر مہ} = \text{مہ ج}$$

$$\text{مساوات } \text{مہ ج} \times \text{لا}^2 = \text{مہ ج} \times \text{لا}^2$$

$$\text{مہ ج} \times \text{لا}^2 = \text{مہ ج} \times (\text{ف} - \text{لا})^2$$

حاصل ہوتا ہے -

حل کو پورا کرنے کے لئے پورے حجموں کو مساوی رکھنا چاہیئے جس سے  $h = J$  حاصل ہوتا ہے جو  $F$  اور  $J$  میں مطلوبہ ربط ہے۔

۲۸۔ جاذبہ ارض کے زیر عمل لچکدار سیال کا سکون۔

اس صورت میں  $d = m$  فٹ

$$\text{اور } \frac{f}{d} = \frac{J}{m} \text{ فری}$$

$$\text{نہ لوک } \frac{J}{m} = \frac{J}{m} \text{ اور } d = J \text{ جی}$$

یہاں بھی مساوی دباؤ کی سطحیں افقی مستوی ہیں اور مستقل  $J$  کا تعین  $Y$  کی کسی دی ہوئی قیمت کے لئے دباؤ کے لئے دباؤ کے معلوم ہونے سے ہو سکتا ہے۔ یا اس صورت سے متعلق کسی دے ہوئے واقعہ کے معلوم ہونے سے۔

مثال :- ایک بند اسطوانہ میں جس کا محور انتصابی ہے ہوا کی دی ہوئی کثیت ہے۔ اسطوانہ کے سرے سے  $Y$  کو ناپنے سے

(۲۲)

$$F = \frac{J}{m} = \frac{J}{m} \text{ جی}$$

یہ اگر  $Y$  کی دی ہوئی کثیت،  $F$  نصف قطر،  $F$  اسطوانہ کا ارتفاع ہو تو

$$K = \frac{J}{m} = \frac{J}{m} \text{ فری}$$

جس سے  $J$  معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۹۔ مساوات عامہ کے استعمال کی مثالیں۔

(۱) فرض کرو کہائع کا دیا ہوا حجم  $H$  محوروں کے متوازی قوتوں

$$F_1 = \frac{J}{m_1} = \frac{J}{m_2} = \frac{J}{m_3}$$

کے زیر عمل ساکن ہے تو

$$\text{فرد} = \text{ث} - \left( \frac{1}{4} \text{ فرلا} - \frac{1}{2} \text{ فرما} - \frac{1}{4} \text{ فری} \right)$$

$$\text{اور } \text{د} = \text{م} - \frac{\text{رث}}{2} \left( \frac{1}{4} \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ با} + \frac{1}{4} \text{ ج} \right)$$

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں متشابہ ناقص بنائیں اور آزاد سطح کی مساوات جبکہ بیرونی دباؤ موجود نہ ہو

$$\frac{1}{4} \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ با} + \frac{1}{4} \text{ ج} = \frac{\text{رث}}{2} \text{ م} - \text{ہے}$$

اب جس بشرط سے مستقل معلوم ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ کائنات کا حجم دیا گیا ہے اور

$$\text{ح} = \frac{\pi}{3} \text{ ا ب ج} \left( \frac{\text{رث}}{2} \right)^3$$

$$\text{اس لئے م} = \frac{\text{رث}}{2} \left( \frac{\text{ح}}{\pi \text{ ا ب ج}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

(۲) ایک ثابت مستوی پر بائع کا دیا ہوا حجم ایک ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو مستوی کے ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ۔

ثابت نقطہ کو میدان قرار دیکر کسی نقطہ پر دباؤ معلوم کرنے کے لئے جملہ

$$\text{د} = \text{م} - \frac{1}{4} \text{ رث} \left( \frac{1}{4} \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ با} + \frac{1}{4} \text{ ج} \right) = \text{م} - \frac{1}{4} \text{ رث} \text{ لا} \text{ حاصل ہوتا ہے}$$

جہاں ر مبداء سے فاصلہ ہے۔ اور اگر  $\frac{\pi}{3}$  دیا ہوا حجم ہو تو آزاد سطح نصف قطر لا والا نصف کرہ ہے۔ اور

$$\text{د} = \frac{1}{4} \text{ رث} \left( \frac{1}{4} \text{ لا} - \frac{1}{2} \right)$$

مستوی کا وہ حصہ جبکہ کائنات مس کرتا ہے ایک دائرہ ہے جس کا نصف قطر لا ہے اور اس لئے

$$\text{اس پر کا دباؤ} = \text{کر کر د ر فر ر فرط}$$

$$= \frac{1}{4} \pi \text{ رث} \text{ لا}$$

(۲۳)

اس نتیجہ کو  $\frac{3}{2} \times 1 = 2$  ث کی شکل میں رکھا جاسکتا ہے۔ یہ جملہ ایسی کشش کو ظاہر کرتا ہے جو مانع کی کل کمیت پر جبکہ وہ مرکز نقل پر ایک مادی ذرہ میں کشش ہو جائے عمل کرتی ہے اور درحقیقت یہ جملہ یہ فرض کر کے بھی فوراً حاصل کیا جاسکتا ہے کہ یہ مانع قوت کے مرکز پر کی کشش اور ستوی کے تعامل کی وجہ سے ساکن ہے

(۳) ایک وزن دار مانع کا دیا ہوا حجم ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور ایسے بدلے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ۔

ثابت نقطہ کو مبدأ قرار دو اور  $y$  کو انتصابی سمت میں نیچے کی طرف ماپو۔ تو

$\Delta = -m \cdot \ddot{y}$   $\Delta = m \cdot \ddot{y}$   $\Delta = m \cdot \ddot{y}$   $\Delta = m \cdot \ddot{y}$

∴ فرد = ث {  $m \cdot \ddot{y} = m \cdot \ddot{y}$  (ج۔ م ی) فری }

اور  $\frac{d}{dt} = m \cdot \ddot{y} = m \cdot \ddot{y} + \frac{d}{dt} = m \cdot \ddot{y}$  ج ی

مسادی دباؤ کی سطحیں کرے ہیں۔ اور آزاد سطح بیرونی دباؤ کو صفر فرض کر کے مساوات

$$\Delta = m \cdot \ddot{y} = m \cdot \ddot{y} = m \cdot \ddot{y}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

اس کرہ کا حجم ہے

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

اس کو دئے ہوئے حجم کے مساوی رکھنے سے مستقل م معلوم ہو جاتا ہے اور پھر کسی نقطہ پر کا دباؤ اور  $y$  کی تو ہم حاصل کیا جاسکتا ہے۔

گھومنے والا سیال

۳۔ اگر سیال کی کچھ مقدار یکساں رفتار سے اور اپنے ذروں کے اضافی مقامات کی تبدیلی کے بغیر (یعنی مستحکم کی طرح) ایک ثابت محور کے گرد گھومے تو گذشتہ مساواتوں کے ذریعہ ہم کسی نقطہ پر کا دباؤ اور مساوی دباؤ کی سطحوں کی نوعیت معلوم کر سکتے ہیں۔

کیونکہ اضافی توازن کی ایسی صورتوں میں سیال کا ہر ذرہ ایک دائرہ میں یکساں رفتار سے حرکت کرے گا اور سیال کے کسی ذرہ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں اور اس پر کے سیالی دباؤ کا حاصل قوت ک سنہ ۲ کے مساوی ہوتا ہے جو محور کی طرف عمل کرتی ہے جہاں سنہ زاویہ رفتار اور ر، محور سے ذرہ ک کا فاصلہ ہے۔ اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ بیرونی قوتوں کو اگر سیالی دباؤ اور محور سے عمل کرنے والی قوتوں ک سنہ ۲ کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو ہمیں سکونی توازن کا ایک نظام ملے گا جس پر دینیات گزشتہ کی مساواتیں استعمال ہو سکتی ہیں۔

متجانس مائع کی کچھ کمیت ایک برتن میں یکساں رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھوم رہی ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ اور مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرنا مطلوب ہے۔

انتصابی محور کو محور سی فرض کرو۔ قوت ک سنہ ۲ کو محوروں کے متوازی تحلیل کرنے سے اس کے اجزائے تحلیل ک سنہ لا اور ک سنہ ما حاصل ہوتے ہیں اور سیالی توازن کی مساوات عامہ ہو جاتی ہے۔

$$(۲۴) \quad \text{فرد} = \text{ث} \quad (\text{سنہ لا فرلا} + \text{سنہ ما فرما} - \text{ج فری})$$

اور اس لئے

$$د = \text{ث} \left\{ \frac{1}{4} \text{سنہ}^2 (\text{لا} + \text{ما}) - \text{ج ی} \right\} + \text{م}$$

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں گردش مکانی نما ہیں اور اگر برتن کے اوپر کا مراکھٹا ہو اور توازن سطح مساوات

$$\text{سنہ}^2 (\text{لا} + \text{ما}) - ۲ \text{ج ی} + \frac{\text{م}}{\text{ث}} = \frac{\text{ث}^2}{\text{ث}}$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ۲ بیرونی دباؤ ہے۔ مستقل کاتعین ہر خاص صورت میں مفروضہ چیزوں کی مدد سے کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً اگر برتن کا سر بند ہو اور مائع سے اسکو بھر دیا جائے اور ۲ = ۰ تو محور کے بلند ترین نقطہ کو مبدأ قرار دینے سے د = ۰ جبکہ لا، ما، ی صفر ہوں اور اس لئے م = ۰ اور

$$د = \text{ث} \left\{ \frac{1}{4} \text{سنہ}^2 (\text{لا} + \text{ما}) - \text{ج ی} \right\}$$

۳۱۔ اب ایک ایسے پکڑا رسیال کی صورت پر غور کرو جو ایسے برتن میں بند ہے جو ایک انتصابی محور

کے گروگھومتا ہے

اوپر کی طرح

فرد = دث {سہ (لا فرلا + ما فرما) - ج فری}

اور  $d = m$  دث  
 $\therefore m \text{ نوک دث} = \text{سہ} \frac{2}{3} \text{ لا} + \frac{2}{3} \text{ ما} - \text{ج ی} + \text{م}$

اس طرح مساوی دباؤ کی سطحیں اور مساوی کثافت کی سطحیں یکساں بنائیں۔

فرض کرو کہ برتن اسطوانہ ہے جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے اور نیز سیال کی کل کمیت دی ہوئی ہے۔ مستقل معلوم کرنے کے لئے سیال کو عنصری افقی حلقہ میں (ہر ایک کی کثافت یکساں) ترتیب دیا ہوا خیال کرو۔ اور فرض کرو کہ اونچائی می ہر ایک حلقہ کا نصف قطر ہے اور افقی موٹائی نصف ر (انتصابی موٹائی نصف می) ہے، اور اسطوانہ کا نصف قطر اور ارتفاع دث ہے تو

حلقہ کی کمیت =  $\frac{2}{3} \text{ دث} \times \text{رف} \times \text{مف می}$

اور سیال کی کل کمیت (ک) =  $\frac{2}{3} \text{ دث} \times \text{رف} \times \text{فر فر می}$

جہاں مبدأ کو اسطوانہ کے قاعدہ میں لیا گیا ہے

اب  $\text{دث} = \text{وا} \times \frac{\text{سہ} \frac{2}{3} \text{ لا} - \text{ج ی}}{\text{وا}}$

اور  $\therefore \text{ک} = \frac{2}{3} \frac{\text{رف} \times \text{وا}}{\text{ج سہ}} (1 - \frac{\text{وا}}{\text{وا}}) (1 - \frac{\text{وا}}{\text{وا}})$

اس مساوات سے ہر معلوم ہو جاتا ہے

۳۲۔ اگر سال یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو اور کسی قسم کی قوتوں کے زیر عمل ہو تو توازن کی مساوات عام ہوں گی

(۲۵)

فرد = دث {لا فرلا + ما فرما + سہ (لا فرلا + ما فرما)}

توازن کے امکان کے لئے شرط کی تین مساواتیں پوری ہونی چاہئیں جن سے فرد کا پیرا متکلی ہونا ظاہر ہو اور اگر یہ شرطیں پوری ہوں تو مساوی دباؤ کی سطحوں اور بعض صورتوں میں

آزاد سطح کا تعین ہو سکتا ہے لیکن یہ یاد رہے کہ ہمیشہ آزاد سطح کا موجود ہونا ممکن نہیں واصل  
آزاد سطح کے وجود کے لئے ضروری ہے کہ مساوی دباؤ کی سطحیں گردش کے محور کے لحاظ سے  
متشاکل ہوں۔

### امثلہ

۱۔ ایک بندلی جہاز قص کی شکل میں ہے اور جس کا محور اعظم انتصابی ہے تین مختلف انگوں سے  
جن کی کثافتیں  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ،  $\rho_4$ ،  $\rho_5$  ہیں بھر دی گئی ہے۔ اگر سطح خاص کے فاصلے  
کسی ایک ماسک سے علی الترتیب  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  ہوں تو ثابت کرو کہ

$$r_1(\rho_1 - \rho_2) + r_2(\rho_2 - \rho_3) + r_3(\rho_3 - \rho_4) + r_4(\rho_4 - \rho_5) = 0$$

۲۔ ایک ساکن متجانس مائع کی دی ہوئی کمیت کے ذرات قانون قدرت کے بموجب ایک  
دوسرے کو جذب کرتے ہیں کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے آزاد سطح کے نیچے گہرائی کا مربع۔ (۱) مستطیلی  
رقبہ پر دباؤ معلوم کرو جو انتصاباً عین ڈوبا ہوا ہے اور جس کا ایک سطح سطح میں ہے (۲) دائری رقبہ پر  
کا دباؤ معلوم کرو جو مائع میں عین ڈوبا ہوا ہے۔

۴۔ مکائی رقبہ کو جو دو ترخاص سے محدود ہے ایک مائع میں انتصاباً عین ڈوبا گیا ہے ہر  
راس مائع کی سطح میں ہے۔ اس پر دباؤ معلوم کرو (۱) جبکہ مائع متجانس ہو (۲) جبکہ مائع کی کثافت  
ایسی بدلے جیسے گہرائی۔

۵۔ مساوی دباؤ کی سطحیں دریافت کرو جبکہ تین ثابت مرکزوں کی طرف اہل ہوں اور اسے  
بدلتی ہوں جیسے ان مرکزوں سے فاصلے۔

۶۔ ایک منتظم چار سطحی (ذوالربعہ السطوح) کو مائع سے بھر دیا گیا ہے، اور اس طرح تھا  
گیا ہے کہ ان کے دو مقابل کے کنارے افقی ہیں۔ اس کے مختلف پہلوؤں پر سکے رباؤں کا  
مائع کے وزن کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۷۔ اگر نقطہ لا، لا، لا، ہی پر نی ا کا فی کمیت محوروں کے متوازی تو ہیں

$$la(ay - ay) + la(ay - ay) + la(ay - ay) = 0$$

عمل کریں تو ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں نارمندی مکائی نما ہیں اور مساوی دباؤ اور کثافت

کے منحنی قائم زاہد ہیں۔

۸۔ ایک ٹھوس کرے کے اندر دوسری چوہ میں جبکہ نصف قطر ٹھوس کرے کے نصف قطر کے نصف ہیں، لہذا مائع سے بھر دیا گیا ہے۔ ٹھوس اور مائع کے ذرات ایسی قوتوں سے ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں جو ایسے بدلتی ہیں جیسے فاصلہ ثابت کر دیا گیا ہو۔ مائع کی سطحیں ٹھوس کرے کے ہم مرکز کرے ہیں۔

۹۔ ثابت کر دیا کہ قوتیں جو

لا = م (ما + مای + می) ، صا = م (می + می + لا) ، لے = م (لا + لا + ما) سے تعبیر ہوتی ہیں مائع کی کثیت کو ساکن رکھیں گے اگر مائع کی کثافت ایسے بدلے جیسے مستوی لا + ما + می = ۰ سے (فصلہ ۲) نیز ثابت کر دیا کہ مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے کے منحنی دائرے ہیں۔

۱۰۔ اگر ایک مخروطی بیالی مائع سے بھر دیا جائے تو ثابت کر دیا کہ مائع کے حجم میں کسی نقطہ پر کے اوسط دباؤ اور پیالہ کی سطح کے ایک نقطہ پر کے اوسط دباؤ میں نسبت ۳:۴ ہوگی۔

۱۱۔ ایک بے وزن برتن قائم مخروط کی شکل کا ہے جس کا زاویہ راس ۲۰° ہے۔ برتن کو مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کو گھر کے کسی نقطہ سے لٹکا دیا گیا۔ اگر مخروط کے محور کا میلان انتصابی سمت کے ساتھ ہو تو ثابت کر دیا کہ

مم ۲ = مم ۲ - مم ۳ قوت (۲) کے زیر عمل ایک مستوی پیراکن ہے قوت کا مرکز مستوی سے ج فاصلہ پر اس طرف واقع ہے جس طرف مائع نہیں ہے۔ مائع کی آزاد کر دیا کہ نصف قطر ۱ ہے۔ ثابت کر دیا کہ مستوی پر دباؤ

$$= \frac{۲}{۱} \text{ ث } (۱ - ج) ۲$$

۱۳۔ ایک متجانس مائع دو قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے جو ایسے بدلتی ہیں جیسے دو ثابت نقطوں سے فاصلوں کے معکوس مربع مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کر دیا۔

اگر صفر دباؤ کی سطح ایک کرہ ہو تو ثابت کر دیا کہ ایسے نقطوں کے طریق میں جن پر دباؤ قوت کے ایک مرکز سے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے کرے ہیں۔





سے حاصل ہوتی ہیں جہاں نہ اختیاری تبدیلی ہے۔

۲۰۔ ایک کھوکھلا کرہ جس کا نصف قطر  $a$  ہے اکائی کثافت کے متجانس مائع سے عین بھر دیا گیا ہے۔ اسکو دو خارجی جاذب مرکزی قوتوں  $\frac{1}{r^2}$  اور  $\frac{1}{r'^2}$  کے درمیان جڑکا یا ہی فاصلہ  $c$  ہے ایسے مقام پر رکھ دیا گیا کہ قوتوں کی وجہ سے اس کے مرکز پر کشش مساوی و متقابل ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر کا دباؤ ہے

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{2} (a + a') + \frac{1}{2} (a + a') \right\}$$

۲۱۔ ایک کرہ جس کا نصف قطر  $c$  ہے متجانس مائع سے تقریباً بھر دیا گیا ہے یہ کرہ قوت کے دو بیرونی مرکوز کے زیر اثر ہے جو کرہ کے قطر پر مرکزی متقابل جانبوں میں اس  $a$  و  $a'$  فاصلوں پر واقع ہیں کسی نقطہ پر قوت کے ہر مرکز کی کشش فاصلہ کے مربع کے تناسب معکوس میں ہے اور مائع کی کمیت پر ان کی کشش بالترتیب  $\frac{1}{c^3}$  اور  $\frac{1}{c^2}$  ہے۔

اگر  $\frac{1}{r} = \frac{1}{c} \left( \frac{a}{a'} - \frac{a}{a} \right)$  اور  $\frac{1}{r'} = \frac{1}{c} \left( \frac{a}{a'} + \frac{a}{a} \right)$  کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{2} (a + a') \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right\} - \frac{1}{c} \left( \frac{1}{2} (a + a') \right)$$

۲۲۔ ایک مائع کی کثافت جو ایک اسطوانی برتن میں ہے ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس کو دوسرے برتن میں منتقل کیا گیا ہے جس میں کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ اس نسبت برتن کی شکل معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک مستدیر مخروط جس کا ذریعہ راس  $\frac{1}{2}$  ہے پانی سے عین بھر دیا گیا ہے اور اس کے ایک کون ایک افقی مستوی میں مضبوط جوڑ دیا گیا ہے مستوی کو کبساں زاوی رقتار سے ایک انحصاری محور کے گرد جو مخروط کے راس میں ہو گزرتا ہے گھمایا گیا ہے۔ بڑی سے بڑی

رفقار معلوم کرو کہ جس سے بلند تریں نقطہ پر دباؤ صفر رہ سکے اور اس صورت میں قواعد پر کا دباؤ بھی معلوم کرو۔

۲۴۔ ایک سیدھا ڈنڈا جس کا ہر ذرہ ایسی قوت سے کشش کرتا ہے جو غا عملہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے متجانس بے پچک سیال کی کیفیت سے نکل رہا ہے۔ مساوی دباؤ کی سطحوں کی شکل معلوم کرو۔

۲۵۔ ایک نل دار مائع افقی مستوی پر پرتھا ہوا ہے اور ایک ثابت مرکز کی طرف ایسی مستقل قوت سے جذب ہو رہا ہے جس کی شدت جاذبہ ارتعش کے مساوی ہے۔ مساوی دباؤ کی سطحوں کی شکل معلوم کرو۔

نیز مستوی پر کا دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ جب مستوی قوت کے مرکز میں سے گزرتا ہے تو یہ دباؤ مائع کے وزن کا  $\frac{1}{2}$  ہوتا ہے۔ نیز مستوی پر کا دباؤ اس صورت میں بھی معلوم کرو جبکہ مستوی قوت کے مرکز کے نیچے یا اوپر واقع ہو۔

۲۶۔ ایک ہذات خول کا دو کروی سطحیں احاطہ کرتی ہیں جو ہم مرکز نہیں خول کا اوہ قدرت کے قانون کی موجب کشش کرتا ہے خول کے اندر کے حصہ کو متجانس مائع سے جڑا پھر دیا گیا ہے جو ہر سطح کے ساتھ یکساں افق سے کروں کے مرکزوں میں سے گزرنے والے خط تقسیم کے گرد گھومتا ہو ثابت کرو کہ اس طرح کوئی مکانی مائع ہو

۲۷۔ ایک استوار کروی خول متجانس بے پچک سیال سے بھر دیا گیا ہے جس کا ہر ذرہ ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتا ہے جو غا عملہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے ثابت کرو کہ سطح پر کے دباؤ اور سیال کے کسی اندر دنی نقطہ پر کے دباؤ کا فرق اس نقطہ میں سے گزرنے والی کرہ کی چھوٹی سے چھوٹی تراش کے رقبہ کے متناسب ہے۔

۲۸۔ ایک کھلا برتن جس میں مائع ہے یکساں تراوی رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھمایا گیا ہے برتن کی شکل اور اس کے ابعاد معلوم کرو کہ وہ عین غالی ہو جائے۔

۲۹۔ متجانس سیال کی ایک غیر محدود کمیت ایک بند سطح کے گرد ہے اور سطح کے اندرونی نقطہ (۱) کی طرف ایسی قوت سے جذب ہو رہی ہے جو غا عملہ کے مکعب کے متناسب معلوم میں ہے اگر سطح کے کسی نقطہ پر سے کہہ عرصہ پر جو دباؤ ہے اسے سمت  $N$  و  $O$  میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ اس طرح حاصل شدہ تمام نقطوں کے قطری دباؤں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے خواہ سطح کی جسامت اور اس کی شکل کچھ بھی ہو بشرطیکہ نقطہ  $N$  سے لا متناہی

فاحصلہ یرسیال کا دباؤ معدوم ہو جاتا ہو۔

۳۰۔ خطِ صوبہ (cardiod)

$$r = 1 \text{ (۱- حجم طه)}$$

کو اس کے محور کے گرد جانشانی ہے (راس اوپر کی طرف) گھما کر ایک طرف بنایا گیا ہے اور اسکو بانی سے عین بھردیا گیا ہے۔ یکساں نژاد می رفتار۔ یہ محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ یہ شمار معلوم کرو جبکہ صفر دباؤ کا خط ط =  $\frac{1}{4}$  ہو کسی دوسرے نقطہ پر بھی دباؤ معلوم کرو۔ اور وہ رفتار بھی دریافت کرو جن پر کا دباؤ بڑے سے بڑا ہے

۳۱۔ تمام فضا ایک ایسے لچکدار سیال سے بھری ہوئی ہے جس کے ذرات ایک نقطہ کی طرف ایسی قوت سے جذب ہوتے ہیں جو ایسی بدلتی ہے جیسے فاصلہ اس سیال کی پوری کثیت دی گئی ہے۔ ایک دائری قسم پر کا دائرہ معلوم کرو جس کا مرکز قوت کے مرکز پر ہے۔

۳۲۔ ایسے دائرے کیسے گئے جن کے مرکز محوری پر ہیں اور جو مستوی لا ما کو مبدا و پر مس کرتے ہیں کسی نقطہ کا تعین (ر، ط، ف) سے کیا گیا ہے جہاں نقطہ ن میں سے گزرنیوالے دائرہ کا نصف قطر اور اس کا مرکز ج سے نذادیہ و ج ن کو ط سے اور مستوی و ج ن اور محوری میں سے گزرنیوالے ایک ثابت مستوی گے درمیان جوازویہ بنتا ہے اس کو فہ سے تعبیر کیا گیا ہے۔

ثابت کو کہ

۳۲۔ ایسے دائرے کھینچے گئے جن کے مرکز محوری پر ہیں اور جو مستوی لاما کو مبداء پر  
مس کرتے ہیں کسی نقطہ کا تعین (ر، ط، فہ) سے کیا گیا ہے جہاں نقطہ ن میں سے  
گذرنیوالے دائرہ کا نصف قطر اور اس کا مرکز ج سے زاویہ وج ن کو ط سے اور مستوی وج ن  
اور محوری میں سے گذرنیوالے ایک ثابت مستوی کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے اس کو فہ  
سے تعبیر کیا گیا ہے۔  
ثابت کردہ کہ

کتابت کردہ

فرد = (۱- جمعه) + فرد + ت جبطه فرد + ت ارفطه + (۲) ر جبطه فرد

جہاں مانع کے مفسر ہر وقتیں م س، م ت، م ن علی الترتیب ر ج ن کی سمت میں دائرہ کے نقطہ ن پر کے تماس کی سمت میں اور دائرہ کی مستوی پر کے عماد کی سمت میں حمل کرتی ہیں۔

۳۳ — ایک بچہ ارساں کی کیت ک ایک مجور کے گرویکیاں نداوی رفتار معہ سے مھوم بھی ہے اور مجور کے ایک نقطہ کی طرف ایسی کشش کے زیر عمل ہے جو فاصلہ کے سرگنا کے مساوی ہے۔ م۔ م۔ سے بڑھ ہے۔ ثابت کرد کہ مساوی کثافت کش کی سطح کی مساوات ہے

$$\left\{ \frac{2}{3} \times \frac{(2-1)}{3} \right\} \text{ لوک } = (1+1) - (1+1) = 0$$

۳۴۔ مانع کی کچھ مقدار جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی ایک لمبے مکافہ میں جس کا وتر خاص ج ہے ف ارتفاع تک بھری ہوئی ہے ثابت کرو کہ اس کی کثافت ایسے بدلے گی جیسے گہرائی کا مربع اگر اس کو ایسے برتن میں منتقل کیا جائے جسکی شکل منحنی ہو گا  $۲ = ۲ ج ف$  (۱-۱۲) (لا - لا)

کو محور لائے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے جہاں د کوئی مستقل ہے۔  
۳۵۔ جاذب بالذات مانع کی کثافت جسکی کثافت ث ہے توازن میں ہے قانون کشش معکوس مربع کا قانون ہے۔ ثابت کرو کہ مانع کے کسی کرہ میں اوسط دباؤ مرکز پر کے دباؤ سے بقدر  $\frac{۲}{۳} ث$  کے کم ہوگا جہاں ر کرہ کا نصف قطر ہے۔

۳۶۔ ایک بند کھوکھلا قائم مستوی مخروط ایک افقی مستوی پر اپنے قاعدہ پر کھڑا ہوا ہے۔ اس کو مانع سے عین بھردیا گیا جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس کے بعد اسکو الٹ کر اس طرح تھاما گیا ہے کہ اس کا اس عین مستوی پر محور اور محور انتصابی ہو۔ ثابت کرو کہ اسکی منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ مقدار میں غیر متغیر رہتا ہے لیکن مانع کی توانائی بالقوہ نسبت

$$۲ \left\{ جا \left( \frac{۱}{۲} \right) \right\} : ۳ جا \left( \frac{۱}{۲} \right)$$

سے بدلتی ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اگر مانع کو مستوی پر ڈال دیا جائے تو توانائی بالقوہ صفر ہوتی ہے۔

۳۷۔ ایک سیال قانون

$$(ث - ثب) = (د - د)$$

کے مطابق خفیف طور پر دہتا ہے جہاں  $ب$  ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ اس سیال کی  $\frac{۲}{۳} ث$  کثافت اپنے ذاتی تجاذب اور بیرونی دباؤ  $د$  کے زیر عمل ایک کرہ کی شکل اختیار کرتی ہے جس کا نصف قطر تقریباً

$$\frac{۱}{۲} \left( ۱ - \frac{۲}{۳} \right) \times \frac{۲}{۳} \left( \frac{۲}{۳} ثب \right)$$

۳۸۔ گیس کی ک کثافت جو مستقل پیش پر ہے تمام فضاء میں پھیلا دی گئی ہے اور

(لا، ما، ی) برتوت (فی اکائی کیت) کے اجزائے تحلیل - (لا، ا - ب، ما - ج، ی) ہیں۔  
 مبداء پر دباؤ اور کثافت علی الترتیب د اور ث کے مساوی ہیں۔ ثبات کر دو کہ

$$ا ب ج ث ک = ۱ = ۲ ۳ ۴ ۵$$

(۲۹) ۳۹ — ہوا کی دی ہوئی کیت ایک ہوا بند اسطوانہ میں ہے جس کا محور انتصابی ہے۔ ہوا اسطوانہ کے محور کے گرد، اصنافی توازن میں گھوم رہی ہے۔ محور کے بلند ترین نقطہ پر دباؤ د اور اس کی مغنی سطح کے بلند ترین نقاط پر دباؤ د ہے۔ ثبات کر دو کہ اگر سیال مطلق طور پر ساکن ہوتا تو محور کے بالائی نقطہ پر کا دباؤ

$$(د - ۵) \text{ ہوتا، جہاں ہوا کا وزن بھی محسوب کیا گیا ہے۔}$$

۴۰ — گیس کی کچھ کیت مستقل پیش پر ایسی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے جن کا قوت مضار کے کسی نقطہ پر نہ ہے (فضا کے حدودی شرائط کچھ بھی ہو سکتے ہیں)۔ اس نقطہ پر جہاں نہ صفر ہوتا ہے، دباؤ ۴ اور کثافت ث ہے۔

اب گیس پر سے قوتوں کا عمل ہٹا دیا گیا ہے اور اسکو ایسی فضا میں بند کیا گیا ہے جہاں اس کی کثافت یکساں ث رہتی ہے۔ ثبات کر دو کہ پھیلاؤ کے باعث گیس میں ذاتی توانائی بالقوتہ کا نقصان ہے

$$ث کر کر نہ نو - ث فرح$$

جہاں تک کل گیس بھر میں لئے گئے ہیں جبکہ وہ ابتدائی حالت میں تھی۔  
 ۴۱ — ایک پچھلا سیال کی دی ہوئی کیت ک ایک استوار خول میں داخل کی گئی

$$اس خول کی مسادات = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۴} = ۱ \text{ ہے اور سیال کے لئے کلیہ دے ث}$$

درست رہتا ہے یہ سیال ایسی قوتوں کے نظام کے زیر عمل سکوں اختیار کرتا ہے جس کا قوتی

$$\text{تفاعل ہے } \frac{۱}{۲} - \text{وک} \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۴} \right) + \text{مستقل}$$

اگر سطح

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

کے کسی نقطہ پرکا دباؤ ثابت ہو تو ثابت کرو کہ نول کے اندر کیت کے مساوی حصوں کے حساب سے اوسط دباؤ ہوگا

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

۴۲ — ایک بند نصف کر دی برتن کا نصف قطر ہے۔ اسکو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی مستوی سطح افقی اور اوپر وار رہے اس میں متجانس وزن دار مائع ڈالا گیا ہے جو محور کی طرف ایسی قوت سے جذب ہوتا ہے جو محور سے فاصلہ کے کعب کے تناسب معکوس میں ہے۔ مائع کا حجم اسقدر ہے کہ اس کی آزاد سطح نصف کرہ کو اس سے زاوی فاصلہ  $\frac{\pi}{3}$  پر ملتی ہے۔ اگر یہ نظام محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سے گھومے تو آزاد سطح برتن کے مستوی سطح کو کنارہ پر ایسے دائرہ میں ملتی ہے جس کا نصف قطر بے ثابت کر دے اکائی فاصلہ پر قوت سے  $\frac{1}{2}$  ہوئی چاہیئے اور ب اور سہ مساوات ذیل سے مربوط ہیں

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

۴۳ — مائع کی کچھ یکساں کیت کر دی شکل کی ہے۔ اس کی کثافت  $\rho$  ہے اور نصف قطر اس کے گرد دوسرا بے پچک مائع ہے جس کی کثافت  $\sigma$  ہے اور بیرونی نصف قطر بے پورا نظام صرف اپنے ذاتی تجاذب کی وجہ سے توازن میں ہے اور نیز کوئی بیرونی دباؤ عمل نہیں کرتا۔ ثابت کرو کہ مرکز پرکا دباؤ ہے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

۴۴ — ایک بے پچک سیال کی یکساں کر دی کیت جس کی کثافت  $\rho$  ہے اور نصف قطر  $r$  ہے دوسرے بے پچک سیال سے جس کی کثافت  $\sigma$  ہے اور بیرونی نصف قطر بے گھری ہوئی ہے پورا سیال اپنے جاذبہ کی وجہ سے توازن میں ہے اور کوئی بیرونی دباؤ یا قوتیں عمل نہیں کرتیں دونوں سیالوں کو ملا کر اسی حجم کا ایک متجانس سیال بنایا گیا ہے اور پھر یہ کیت کر دی شکل

میں متوازن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی صورت میں مرکز پر کا دباؤ دوسری صورت میں مرکز پر کے دباؤ سے بقدر

$$\frac{1}{r} \pi (8 - \theta) \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\theta}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right]$$

کے بڑا ہے۔

۴۵۔ ایک متجانس تجاذبی ٹھوس سطح  $r = 1$  {  $1 + e$  } (جمطہ) سے محدود ہے۔ اس ٹھوس کی کیت کب اور کثافت  $\rho$  ہے اور  $e$  اتنا چھوٹا ہے کہ اس کا مربع نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یہ ٹھوس ایک تجاذبی مائع سے جسکی کیت کب اور کثافت  $\theta$  سے گھرا ہوا ہے ثابت کرو کہ آزاد سطح کی مساوات تقریباً

$$r = b \{1 + e\} \quad \text{(جمطہ)}$$

ہے جہاں

$$b = \frac{3}{\pi \theta} \left\{ \frac{k}{\theta} + \frac{k}{8} \right\}$$

اور

$$b = \frac{3(8 - \theta)(2 + n)}{3 + n}$$

$$\{ (2 - n) \theta b^3 + (1 + n) (8 - \theta) b^3 \}$$

۴۶۔ ایک یکساں بے پچک سیال کی کیت تجاذبی اکائیوں میں  $k$  ہے۔ اپنی ذاتی کشش کے زیر اثر یہ ایک کرہ کی شکل اختیار کرتا ہے جسکا نصف قطر  $a$  ہے اسکو ایک کمزور قوت کے میدان میں رکھا گیا ہے جس کا تجاذبی قوت ہے

$$Z = \frac{n}{1 + n} e \quad \text{(جمطہ)} \quad (n < 1)$$

جہاں  $n$  کی اوسط کردہ سطح کے مرکز سے ر ناپا گیا ہے۔  $m$  کے نمونہ کی رتوں کے مربع نظر انداز کئے جاسکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ آزاد سطح کی مساوات ہے۔



$$\frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \text{ (جملہ)}$$

۴۷۔ اگر زمین کو تناسل مانع کا ایک کرہ خیال کیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز پر دباؤ نہ ہوگا۔  
 پونڈفی مربع فٹ ہوگا جہاں زمین کے مادہ کے ایک مکعب فٹ کثیت کا وزن دشا پونڈ ہے اور زمین  
 کا نصف قطر ۱ فٹ۔

۴۸۔ تجاذبی مانع کا ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر اس ہے۔ کسی نقطہ پر اس کی کثافت یکساں طور  
 پر بڑھتی جاتی ہے جیسے وہ نقطہ مرکز کے قریب آتا جاتا ہے سطحی کثافت متساوی اور او سط  
 کثافت ثابت ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{2}{9} \pi \{ 10 \text{ (ت) } (ت - ت) + 3 \text{ (ت) } \}$$

۴۹۔ تجاذبی سیال کا ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر اس ہے۔ مساوی کثافت کی سطحیں  
 حدودی سطح کے ساتھ ہم مرکز کرے ہیں۔ اور آزاد سطح سے مرکز کی طرف جانے میں کثافت کسی  
 قانون کی بموجب بڑھتی جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ اس دباؤ سے جبکہ کثافت یکساں  
 ہو بقدر

$$\frac{4}{9} \pi \text{ (ت) } (ت - ت) \text{ (ت) } \text{ ر فر}$$

کے بڑا ہوتا ہے جہاں ت پوری کثیت کی اوسط کثافت کو اور ت اس حصہ کی اوسط کثافت  
 کو تعبیر کرتا ہے جو مرکز سے ر فاصلہ کے اندر ہے اور جہ تجاذب کا مستقل ہے۔



(۳۱)

# باب سوم

## سطحوں پر سیالات کا حاصل دباؤ

۳۳۔ ہم نے گذشتہ باب میں یہ دیکھا ہے کہ سیال کے کسی نقطہ پر دباؤ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے جبکہ سیال دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو۔ اب ہم اُن دباؤ کے حاصل دریافت کرینگے جو سیال سطحوں پر پیدا کرتے ہیں جن کے ساتھ وہ تماس رکھتے ہوں۔

سطحوں پر سیال کے عمل کو ہم اس ترتیب سے بحث میں لائیں گے۔ پہلے سیالات کا عمل مستوی سطحوں پر پھر جاؤں گا زمین کے ماتحت سیال کا عمل منحنی سطحوں پر اور آخر میں کسی دی ہوئی قوتوں کے ماتحت ساکن سیال کا عمل منحنی سطحوں پر۔

## مستوی سطحوں پر سیالی دباؤ

چونکہ مستوی کے تمام نقطوں پر دباؤ مستوی پر عمود وار ہوتے ہیں اور ایک ہی سمت میں عمل کرتے ہیں اس لئے حاصل دباؤ اُن تمام دباؤں کا مجموعہ ہوتا ہے۔ پس اگر سیال بے پچک ہو اور صرف جاذبہ ارض کے زیر عمل ہو تو کسی مستوی پر کا حاصل دباؤ

$$= \sum p \cos \theta = \sum p \cos 0^\circ = \sum p$$

جہاں  $\sum$  سے مستوی کا رقبہ اور  $p$  سے اس کے مرکز ہندسی کی گہرائی تعبیر ہوتی ہے۔ عام طور پر اگر سیال کسی قسم کا ہو اور دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو تو مستوی کے اندر محور لا اور مالو اور فرنس کردہ نقطہ (لاما) پر دباؤ  $d$  ہے۔

تورقہ کے غرض سے لا مٹ ما پیر کا دباؤ = د مٹ لا مٹ ما

∴ حاصل دباؤ =  $\frac{d}{r}$  فرما فرلا

جہاں تکمیل کل رقبہ زیر بحث پر لیا گیا ہے۔

اگر قطبی محدود استعمال کے جائیں تو حاصل دباؤ

$$= \frac{d}{r} \text{ فر فرطہ}$$

۳۴۔ تعریف۔ سطح مستوی کی صورت میں دباؤ کا مرکز وہ نقطہ ہے جہاں مستوی سے اس تنہا قوت کی سمت اپنی جو مستوی سطح پر کے تمام سیالی دباؤں کے حاصل کے مساوی ہے۔

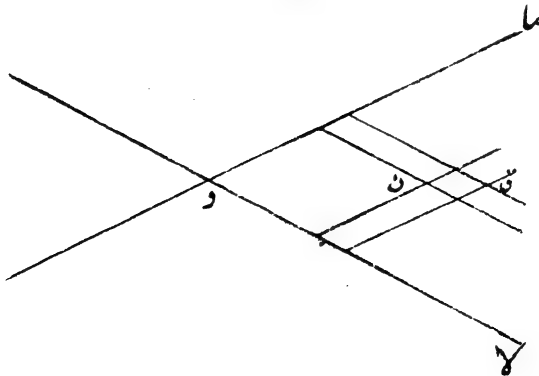
یہاں دباؤ کے مرکز کی تعریف مستوی سطحوں کے لحاظ سے کی گئی ہے۔ آئندہ یہ معلوم ہوگا کہ سختی سطحوں پر سیالات کا حاصل عمل ہمیشہ ایک تنہا قوت میں تحلیل نہیں کیا جاسکتا۔

(۳۲)

وزن دہریال کی صورت میں یہ ظاہر ہے کہ افقی رقبہ کا دباؤ کا مرکز اس کا مرکز ہندسی ہوگا کیونکہ اس کے ہر نقطہ پر کا دباؤ مساوی ہے اور چونکہ گہرائی کے بڑھنے کے ساتھ دباؤ بھی بڑھتا جاتا ہے اس لئے غیر افقی مستوی میں دباؤ کا مرکز ہندسی کے نیچے واقع ہوگا۔

کسی مستوی رقبہ کا دباؤ کا مرکز معلوم کرنے کے لئے ضابطے۔ فرض کر دو مستوی کے اندر علی القواہم محاورے کے لحاظ سے کسی نقطہ کے محدود (لا، ما) ہیں اور اس پر کا دباؤ د، اور اس کے ساتھ کے نقطہ کے محدود (لا + مٹ لا، ما + مٹ ما) ہیں۔

نیز (لا، ما) دباؤ کے مرکز کے محدود ہیں۔



تو  $\text{م} \times \text{ا} = \text{ا} \times \text{د} = \text{د} \times \text{ف} = \text{ف} \times \text{ا} = \text{ا} \times \text{د} = \text{د} \times \text{ف} = \text{ف} \times \text{ا}$   
 دباؤ کے گرد قمر کے تمام عناصر پر کے دباؤ کے معیاروں کا مجموعہ۔

$$\text{م} \times \text{ا} = \text{ا} \times \text{د} = \text{د} \times \text{ف} = \text{ف} \times \text{ا}$$

$$\text{ا} \times \text{د} = \text{د} \times \text{ف} = \text{ف} \times \text{ا}$$

$$\frac{\text{ا} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{د}} = \text{م} \quad \therefore$$

$$\frac{\text{ا} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{د}} = \text{لا} \quad \text{اسی طرح}$$

تکملے رقبہ زیر بحث پر لئے گئے ہیں۔  
 اگر قطبی محدد استعمال کئے جائیں تو اسی طرح کے طریق عمل سے

$$\frac{\text{ا} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{د}} = \text{م} \quad ، \quad \frac{\text{ا} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{د}} = \text{لا}$$

۳۵۔ اگر سیال متجانس اور بے چسب ہو اور صرف جاذبہ ارض ہی عمل کرے تو  
 $\text{د} = \text{ج} \times \text{گ}$

(۳۳)

جہاں گ سطح کے نیچے نقطہ ن کی گہرائی ہے۔ اس لئے اس صورت میں

$$\frac{\text{ا} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{د}} = \text{م} \quad ، \quad \frac{\text{ا} \times \text{د}}{\text{ا} \times \text{د}} = \text{لا} \quad \text{..... (عہ)}$$

بعض اوقات مستوی اور سیال کی سطح کے خط تقاطع کو ایک محور مقرر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اگر  
 اس خط کو ہم محور لا فرض کریں اور مستوی اور افق کے درمیان زاویہ ط ہو تو

د = ج ث ما جب طہ ، اور اس لئے

$$\frac{\text{کرلا مافرما فرلا}}{\text{کرلا مافرما فرلا}} = \frac{\text{کرلا مافرما فرلا}}{\text{کرلا مافرما فرلا}} \dots \dots \dots (ب)$$

ان آخری مساواتوں (ب) سے ظاہر ہے کہ دباؤ کے مرکز کا مقام مستوی اور افق کے درمیانی دائرہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ اس لئے اگر مستوی اور سیال کی سطح کے خدائے قاطع کے گرد مستوی کو گھرایا جائے تو دباؤ کے مرکز کے مقام میں تبدیلی واقع نہیں ہوگی۔

اگر مساواتوں (د) میں گ کے مستقل قرار دیا جائے یعنی اگر مستوی کو افقی فرض کیا جائے تو تہ اور مآ رقبہ کے مرکز ہندی کے محدود ہوجاتے ہیں اور یہ نتیجہ دفعہ پہلے کے مطابق ہے۔ لیکن مساواتوں (ب) میں تہ اور مآ کی قیمتیں طہ پر منحصر نہیں ہیں اور طہ کے محدود ہونے سے ان کی کل میں کوئی فرق نہیں آتا اور اس صورت میں مرکز ہندی کے محدود حاصل نہیں ہوتے۔ اس ظاہر سے سبب ظاہر کی گئی تو نتیجہ اس طرح ہو سکتی ہے۔ طہ کو کتنا ہی چھوٹا لیا جائے مستوی اور سیال کی سطح کا درمیانی سیال ہمیشہ فائدہ کی شکل میں ہوگا۔ اور مستوی کے مختلف نقاط پر کے دباؤ اگرچہ انتہا میں سبب محدود ہونے کے ہیں لیکن یہ مساویت کی نسبتوں میں محدود نہیں ہوتے بلکہ طہ کی کسی محدود قیمت کے لئے یہ دباؤ جو مستقل نسبتیں آپس میں رکھتے ہیں ان مستقل نسبتوں میں یہ سفر جوتے ہیں۔

اس دفعہ کی مساویں مستندال ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہیں۔

مستوی رقبہ کو محدود کرنے والے خط کے ہر نقطہ سے انتصابی خطوط سیال کی سطح تک کھینچیں۔ ہر سطح سیال کی کچھ کثیت ان میں گھر جائیگی۔ اس مساوی۔ کے تعال کا انتصابی جزو تجلیلی سیال کی اس کثیت کے وزن کے برابر ہوگا اور یہ وزن کثیت کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں عمل کرے گا اور جہاں پر یہ خط مستوی رقبہ کے لئے گا وہ دباؤ کا مرکز ہوگا۔

وہی محور لو تو ایک عنصری منشور کا وزن جو مستوی کے نقطہ (لا، ما) میں سے عمل کرتا ہے ج ث گ مت لامف ماحم طہ ہوگا جہاں افق کے ساتھ مستوی کا سیلان طہ ہے اور اس لئے مستوی کے نقطوں پر عمل کرنے والی ان متوازی قوتوں کا مرکز مساواتوں

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \frac{\text{کرج ٹگ لاجم طہ فرما فرلا}}{\text{کرج ٹگ جم طہ فرما فرلا}} ، \text{ما} = \frac{\text{کرج ٹگ ماجم طہ فرما فرلا}}{\text{کرج ٹگ جم طہ فرما فرلا}} \text{ سے لینے} \\ \text{لا} &= \frac{\text{کرج لا فرما فرلا}}{\text{کرج فرما فرلا}} ، \text{ما} = \frac{\text{کرج ما فرما فرلا}}{\text{کرج فرما فرلا}} \text{ سے حاصل ہوتا ہے۔} \end{aligned}$$

پس یہ ظاہر ہے کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی گھرے ہوئے سیال کی کمیت کے مرکز کی گہرائی کا دو چند ہے۔

۳۶۔ وزن دار مائع کی صورت میں دباؤ کے مرکز کا مقام مسئلہ ذیل سے ہندسی طور پر حاصل ہو سکتا ہے۔

اگر قہر کے مستوی میں ایک ایسا خط مستقیم لیا جائے جو مائع کی سطح کے متوازی اور قہر کے مرکز ہندسی سے اتنا ہی نیچے واقع ہو جتنا اس سے (مرکز ہندسی سے) مائع کی سطح اور واقع ہے تو اس خط مستقیم کا قطب بلحاظ مرکز ہندسی پر کے میاری قطع ناقص کے جس کے نیم محور اس نقطہ پر گردش کے صدری نیم قطر ہیں دباؤ کا مرکز ہوگا۔

رقبہ کو ۱ اور گردش کے صدری نصف قطروں کو ۱، ب، فرض کرو تو یہ صدری نصف قطسہ ان ساداتوں سے معلوم ہوتے ہیں:-

$$\text{ا} \text{ ب} = \text{کرج لا فرلا فرما} \quad \text{ا} = \text{کرج لا فرلا فرلا}$$

میاری (Moment) ناقص کی سادات ہے

$$۱ = \frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲} + \frac{\text{لا}^۲}{۲}$$

جہاں حوالے کے محور مرکز ہندسی پر کے صدری محور ہیں۔  
فرض کرو کہ لا، ما دباؤ کے مرکز کے محد ہیں اور سطح میں کس خط کی سادات ہے

لاجم طہ + ماجب طہ = ع



قطبی محدود استعمال کرنے سے اور دباؤ کو ابتدائی خط لینے سے ہیں دھج ث ر جب ط  
حاصل ہونا چاہیے اور

$$\bar{L} = \frac{\text{کرکر ر جم ط جب ط فر فر ط}}{\text{کرکر ر جب ط فر فر ط}} = \frac{\bar{L} \frac{3}{14}}{\bar{L} \frac{3}{14}}$$

$$\text{اور } \bar{M} = \frac{\text{کرکر ر جب ط فر فر ط}}{\text{کرکر ر جب ط فر فر ط}} = \frac{\bar{M} \frac{3}{14}}{\bar{M} \frac{3}{14}}$$

(۲) ایک دائری رقبہ جس کا نصف قطر ہے انتصابی سمت میں ڈبوا گیا ہے اور اس کا مرکز ہندی گہرائی تک پر واقع ہے۔

مرکز کو مبدأ اور اس میں سے گزرنے والے نیچے دار انتصابی خط کو ابتدائی خط قرار دو۔ اگر نقطہ (ر، ط) پر کا دباؤ د ہو تو

$$d = \text{ج مٹ (گ + ر جم ط)}$$

اور مرکز کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{2}{\bar{L}} = \frac{\text{کرکر ر جم ط (گ + ر جم ط) فر فر ط}}{\text{کرکر ر (گ + ر جم ط) فر فر ط}}$$

نتیجہ دیکھو کہ اس کے مسئلہ سے فوراً انداز کیا جاسکتا ہے۔

۱۴۳ ایک انتصابی مستطیل جس کا عرض افقی ہے کرہ ہوائی کے زیر عمل ہے جو مستقل قشر پر ہے۔

۱۴۴ مستطیل کے قاعدہ پر کرہ ہوائی کا دباؤ ۲۱ ہو تو یہی بلندی پر دباؤ ۲۱ ٹوم ہوگا دھج ۱۴۳

۱۴۵ اگر ب سے مستطیل کا عرض تقریباً مستطیل کی ایک افقی پٹی پر کا دباؤ

$$\bar{M} = \text{ب مٹ ی}$$

۱۴۶ اگر مستطیل کا طول ۱۴ ہو تو اس پر کا حاصل دباؤ

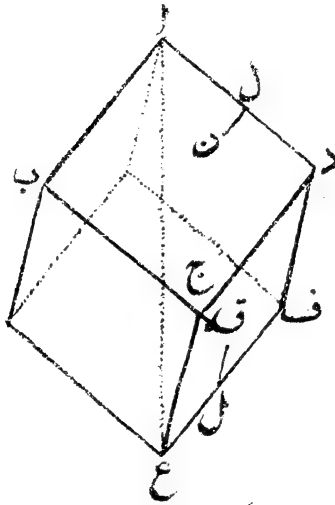


$$= \left( \frac{1}{\text{جی}} - \frac{1}{\text{م}} \right) \frac{\text{بم}}{\text{ج}} = \text{فری} \quad (1 - \frac{1}{\text{م}}) \frac{1}{\text{ج}}$$

اور دباؤ کے مرکز کی بلندی

$$\frac{\frac{1}{\text{جی}} - \frac{1}{\text{م}}}{\frac{1}{\text{جی}} - \frac{1}{\text{م}}} = \frac{\text{فری}}{\text{فری}}$$

(۳۶) ایک کھوکھلا کعب مانع سے تقریباً بھر دیا گیا ہے۔ یہ کعب اپنے ایک انتہائی وتر کے گرد یکساں طور پر گھومتا ہے۔ ان کے مختلف رخوں پر سکے دباؤ اور ان سکے دباؤ کے مرکز معلوم کرو۔



۱۔ اوپر کے رخ ا ب ج د کے لئے۔

ا د، ا ب کو محور لا اور محور ما قرار دو۔ اور فرض کرو کہ کسی نقطہ ن (لا ا ا) کے نقطہ سے افقی اور انتہائی فاصلے ی اور ر ہیں تو

$$\frac{1}{\text{جی}} = \frac{1}{\text{م}} + \text{جی}$$

ی =  $\frac{لا + ا}{۳۶}$ ، شکستہ خط ا ل ن کا ا ع پر نقل لینے سے،

$$ر = ان - عا = لا + ما - عا = \frac{2}{3} (لا + ما - لا) = \frac{2}{3} (ما - لا)$$

∴ رخ ا ب ج د پر کا دباؤ (۵)

$$= \int_a^b \int_c^d \text{فرما فرما}$$

$$= \int \left\{ \frac{2}{3} (لا + ما - لا) + \frac{2}{3} (لا + ما) \right\} \text{فرما فرما}$$

$$= \int \left\{ \frac{5}{3} لا + \frac{2}{3} ج \right\}$$

دباؤ کا مرکز مساواتوں

$$لا = ۵ = ۵ = \int \left\{ \frac{2}{3} (لا + ما - لا) + \frac{2}{3} (لا + ما) \right\} \text{فرما فرما}$$

$$\text{یعنی } لا = ما = \frac{21 ج + ۳۳ لا}{۳۴ ج + ۳۵ لا}$$

سے حاصل ہوگا۔

۲۔ پچھلے رخ ع ج د ف کے لئے۔

ع ف اور ع ج کو محاور قرار دو۔ تو کسی نقطہ کے لئے

$$ع = ا - ما = \frac{لا + ج}{۳}$$

$$ر = \frac{2}{3} (لا + ما - لا)$$

اور بقیہ عمل بالکل پہلی صورت کی طرح۔

۵۔ دائرہ کا ایک ربع انتصابی سمت میں ایک ماتے میں عین ڈوبا گیا۔ دائرہ ایک کنارہ ماتے کی سطح میں ہے اور ماتے کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ (۳۷)

سطح کے اندر کے کنارے کو محور دلا قرار دیں تو  $ف = ما$ ،  $د = \frac{1}{2}$  سرچ ما

اس لئے دباؤ کا مرکز مساواتوں

$$\bar{L} = \frac{\text{کر } ۱ \text{ ر } ۱ \text{ لا } ۱ \text{ فرما فرلا}}{\text{کر } ۱ \text{ ر } ۱ \text{ فرما فرلا}} \text{ اور } \bar{M} = \frac{\text{کر } ۲ \text{ ر } ۲ \text{ فرما فرلا}}{\text{کر } ۲ \text{ ر } ۲ \text{ فرما فرلا}} \text{ سے حاصل ہوگا}$$

قطبی محددوں میں

$$\bar{L} = \frac{\text{کر } ۱ \text{ ر } ۲ \text{ جب } ۲ \text{ ط جم ط فرر فرط}}{\text{کر } ۲ \text{ ر } ۲ \text{ جب } ۲ \text{ ط فرر فرط}} \text{ اور } \bar{M} = \frac{\text{کر } ۲ \text{ ر } ۲ \text{ جب } ۲ \text{ ط فرر فرط}}{\text{کر } ۲ \text{ ر } ۲ \text{ جب } ۲ \text{ ط فرر فرط}}$$

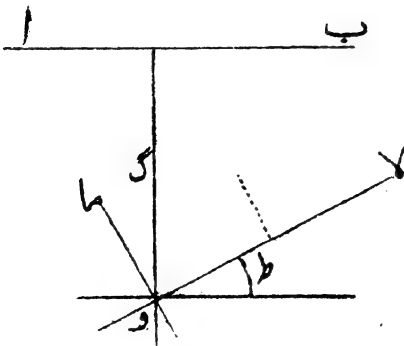
بنے

$$\bar{L} = \frac{۱۶}{۳۱۵} \text{ اور } \bar{M} = \frac{۳۲}{۳۱۵}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

(۶) ایک نصف دائری رقبہ پانی میں پوری طرح ڈبو دیا گیا ہے دائرہ کی سطح اقتصادی ہے اس کو احاطہ کرنے والے قطر کا ایک سراماٹن کی سطح میں ہے فرض کر کے قطر اور سراماٹن کی سطح کا درمیانی زاویہ عم ہے اور قطر اور ا پر کے ماس کو محاور مان کر دباؤ کے مرکز کے محدد (لا، ما) ہیں تو

لا کر ر جب (ط+عم) فرر فرط = کر ر ۲ جم ط جب (ط+عم) فرر فرط  
اور ما کر ر جب (ط+عم) فرر فرط = کر ر ۲ جب ط جب (ط+عم) فرر فرط  
ر کے حدود ۰ سے ۱۲ جم ط  
تک اور ط کے ۰ سے ۳۲ تک  
لئے جائیں۔



۳۸ — اگر ایک دیا ہوا مستوی رقبہ اپنے ہی مستوی میں ایک ثابت نقطہ کے گرد گھومے تو دباؤ کا مرکز اپنا مقام بدلتا ہے اور رقبہ پر ایک انمغنی مرکز مقرر ہوتا ہے۔

اگر مستوی رقبہ اور آزاد سطح کا خط تقاطع  $\Delta$  ہے تو  $\Delta$  ب سے دباؤ کے مرکز کا فاصلہ رقبہ اور انتصابی سمت کے درمیانی زاویہ پر منحصر نہیں ہوتا (دفعہ ۳۵) اس لئے ہم رقبہ کو انتصابی لے سکتے ہیں۔

(۳۸) فرض کرو کہ ثابت نقطہ  $O$  کی گہرائی  $g$  ہے اور رقبہ کے اذرع  $OA$  و  $OB$  ثابت ہیں۔

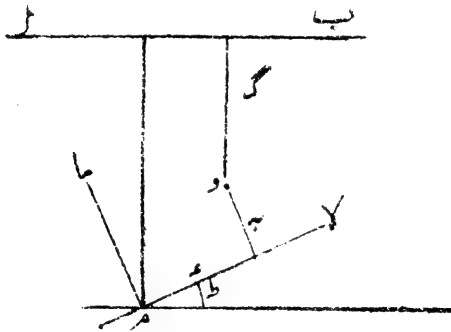
اگر  $O$  کا میلان افق کے ساتھ  $\theta$  ہو تو

$$d = g \sin \theta \quad (\text{گ} - \text{لا جب } \theta - \text{ما جم } \theta)$$

$$\therefore \frac{O'A}{O'B} = \frac{g \sin \theta + d}{g \sin \theta + d} = \frac{g \sin \theta + d}{g \sin \theta + d}$$

$$\text{اور } \frac{O'A}{O'B} = \frac{g \sin \theta + d}{g \sin \theta + d}$$

جہاں  $O'A$  و  $O'B$  وغیرہ معلومہ مستقل ہیں۔  $AB$  کو ساقط کرنے سے دباؤ کے مرکز کا طریق ایک مخروطی تراش ہوگی۔



دفعہ (۳۶) کے مسئلہ کی مدد سے بھی ہم اس نتیجہ کو اخذ کر سکتے ہیں۔

ہندسی مرکز  $O$  میں سے گزرنے والے عددی محوروں کو حوالے کے محور قرار دیکر

اور  $O$  کے محدد (غائب) فرض کر کے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ دباؤ کا مرکز خط مستقیم

$$\text{لا جب } \theta + \text{ما جم } \theta = - (\text{گ} + \text{ع جب } \theta + \text{ب جم } \theta)$$

کا قطب (ضنا، عا) بلحاظ معیاری ناقص کے ہے اور مساواتوں

$$\frac{ا^۲ جب ط}{ضنا} = \frac{ب^۲ جم ط}{عا} = - (گ + ع جب ط + ج جم ط)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ ان مساواتوں سے مساواتیں

$$\left( \frac{ا}{ضنا} + ع \right) جب ط + ب جم ط = - گ$$

$$\left( \frac{ب}{عا} + ج \right) جم ط + ع جب ط = - گ$$

حاصل ہوتی ہیں۔

پہلے جب ط کو اور پھر جم ط کو سا قفا کر کے حاصل شدہ نتیجوں کا مربع لیکر جمع کریں تو

$$\left( ا^۲ ب^۲ + ع جب ط + ب جم ط + ج^۲ عا^۲ \right) = گ^۲ (ا^۲ عا^۲ + ب^۲ ضنا^۲)$$

ہے۔

اگر د اور ہر ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں یعنی اگر ع = ۰ اور ب = ۰ تو طریق کی مساوات ہو جائیگی

$$\frac{۱}{گ} = \frac{ا^۲}{ب^۲} + \frac{ع ا^۲}{ضنا^۲}$$

۳۹ — ایک برتن میں دو قسم کے مائع میں جو ایک دوسرے کے ساتھ آمیز نہیں ہوتے۔ (۳۹)

برتن کا قاعدہ مستوی ہے اور اس کے پہلو مستوی اور انتصابی ہیں۔ ایک پہلو پر حاصل دباؤ اور اس کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اوپر کے مائع کی کثافت ت اور گہرائی گ ہے اور نیچے کے مائع کے لئے متناظر تمام ت، اور گ ہیں۔ مشترک سطح انفی مستوی ہونی چاہیے جس کے ہر نقطہ پر کا دباؤ ج اٹ گ ہوگا اور مشترک سطح کے نیچے ی گہرائی پر کا دباؤ ہوگا

$$ج ت گ + ج ت ی$$

انتصابی پہلو کا عرض ب لینے سے اس پر اوپر کے مائع کا دباؤ = ج ت ب گ

اور نیچے کے مائع کا دباؤ =  $\rho g (h_1 + h_2)$  (ب فری  
 $= \rho g (h_1 + h_2)$  (ب گ)  
 حاصل دباؤ ان دونوں کا مجموعہ ہوگا جو

$$= \rho g \left\{ \frac{1}{2} h_1 + h_2 \right\}$$

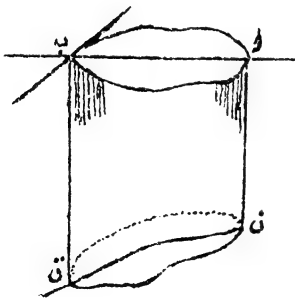
اس پہلو پر کے سیالی دباؤ کا معیار (اس کے اور آزاد سطح کے خط تقاطع کے گرد)

$= \rho g (h_1 + h_2)$  (ب فری) (ب گ) (ب فری)  
 اعمال مکمل کو پورا کر کے متذکرہ بالا حاصل دباؤ کے جملہ سے اسکو تقسیم کرنے سے ہمیں دباؤ کے  
 مرکز کی گہرائی حاصل ہو جاتی ہے۔

منحنی سطحوں پر کے حاصل دباؤ

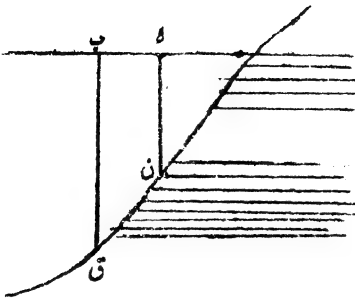
۴۔ ایک متجانس مائع کا جو جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے کسی سطح پر حاصل انتصابی  
 دباؤ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سطح  $ABC$  پر ایک وزن دار مائع کا عمل ہو رہا ہے اور مائع کی آزاد سطح پر اس کا  
 غل و ب ہے۔ مائع کی کثیت  $\rho$  اور مائع  
 کے انحنی دباؤ اور  $h$  کے تعادل کے باعث  
 متوازن ہے۔ اس تعادل کو انتصابی سمت میں  
 تحلیل کیا جائے تو یہ جزو تکمیلی  $\rho g h$  کے وزن  
 کے برابر ہونا چاہیئے اور برعکس اس کے  $h$  کی  
 پر کا انتصابی دباؤ  $\rho g h$  کے وزن کے برابر  
 ہوگا اور اس کی کثیت کے مرکز میں سے عمل کرے گا۔



اگر  $h$  کو مائع اوپر کی طرف دبائے جس طرح کہ دوسری شکل سے ظاہر ہے تو سطح کو خارج  
 کرو۔ اور  $h$  کا غل و ب کے مرکز میں سے عمل کرے گا۔

(۴۰)



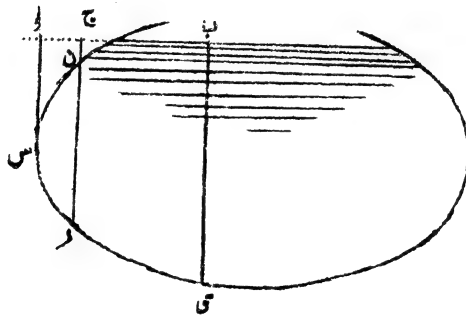
مانع سے بھری ہوئی ہے اور مانع کو نیچے سے خارج کر دیا گیا ہے۔

ن ق کے تمام نقطوں پر کے دباؤ وہی ہیں جو پہلے تھے لیکن متقابل سمتوں میں اور چونکہ اس مفروضہ صورت میں انتصابی دباؤ ق کے وزن کے مساوی ہے اس لئے اصلی صورت میں حاصل انتصابی دباؤ اوپر کی جانب ق کے وزن کے برابر ہوگا۔

اگر سطح کو مانع جزا اوپر کی طرف اور جزا نیچے کی طرف دبائے تو نقطہ ن میں سے جو سطح کے زیر بحث حصہ کا بلند ترین نقطہ ہے ایک انتصابی سطح مستوی ن رکھیں جو اور فرض کر دو کہ مانع کی سطح پر ن س ق کا نکل راج ب ہے۔

تو حاصل انتصابی دباؤ ن س ر پر  

$$= \text{ن س ر کے اندرونی مانع کا وزن}$$



اور ر ق پر = ج ق کے اندرونی مانع کا وزن  
 اور پورا انتصابی دباؤ = ج ق کے اندرونی مانع کا وزن + ن س ر کے اندرونی مانع کا وزن۔

یہ نتیجہ گزشتہ دو صورتوں کی مدد سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ ن ر کو انتصابی

عامی مستویوں کے خط تماس سے دو حصوں  $N$  و  $S$  میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن پر

کے دباؤ علی الترتیب  $Q$  اور  $P$  وارہ نیچے وارہ ہیں۔ اور چونکہ

$N$  پر  $S$  کا دباؤ = مانع  $L$  و  $N$  کا وزن

اور  $S$  پر  $N$  کا دباؤ = مانع  $L$  و  $S$  کا وزن

اس لئے ان کا فرق یعنی  $N$  پر  $S$  کا انتصابی دباؤ = مانع  $L$  و  $N$  کا وزن

اسی طرح دوسری صورتوں پر غور کیا جاسکتا ہے۔

مشاہدہ طلب ہے کہ یہ تحقیق غیر متجانس مانع (جس میں کثافت گہرائی کا ایک تفاعل ہونی چاہئے)

کیونکہ مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کثافت کی سطحیں ہوتی ہیں (کی صورت میں بھی درست ہے

بشرطیکہ قانون کثافت مانع کی مفروضہ سمیت میں بھی وہی خیال کیا جائے۔

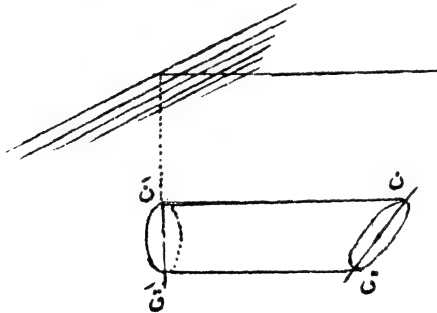
۴۱۔ سطح  $N$  پر  $Q$  کا حاصل افقی دباؤ کسی دی ہوئی سمت میں معلوم کرنا۔

دی ہوئی سمت کے علی القوام انتصابی مستوی پر  $N$  کا فاصلہ اور فرض کرو کہ یہ

فلن  $N$  و  $Q$  ہے

کمیت  $N$  و  $Q$  پر کے دباؤ  $N$  و  $Q$  پر کے حاصل افقی دباؤ اور مستوی  $N$  و  $Q$

کے متوازی انتصابی مستویوں میں عمل کرنے والی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے۔



اس لئے  $N$  و  $Q$  پر کا افقی دباؤ  $N$  و  $Q$  پر کے افقی دباؤ کے مساوی ہے۔ اور یہ دباؤ ایک ہی

خط مستقیم میں عمل کرتے ہیں یعنی  $N$  و  $Q$  کے دباؤ کے مرکز میں سے گزرنے والے افقی خط

میں سے۔

اس لئے عام طور پر کسی سطح پر حاصل دباؤ معلوم کرنے کے لئے اس پر کا انتصابی دباؤ



اور علی القواہم سمتوں میں حاصل افقی دباؤ معلوم کرو۔ یہ تین قوتیں بعض صورتوں میں ایک تہا قوت میں تحویل ہو سکیں گی جس کے لئے شرط سکونیات کے عام طریقوں سے حاصل کیجا سکتی ہے۔

مثال ۲: ایک نصف کرہ متجانس مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کو مرکز میں سے گزرنے والے دو علی القواہم انتصابی سطحوں سے چار حصوں میں تقسیم کر دیا گیا۔ ان چار منحنی حصوں میں سے ایک حصہ پر کا حاصل عمل دریافت کرو۔

مرکز کو مبدأ مانو، احاطہ کرنے والے افقی نصف قطروں کو محور لا اور محور با، اور انتصابی نصف قطر کو محور خی فرض کرو تو لاکے متوازی دباؤ، ربع ماوی پر کے دباؤ کے مساوی ہوگا جہاں ماوی، دلا کے علی القواہم مستوی پر منحنی سطح کا ظل ہے۔ اس لئے دلا کے متوازی دباؤ

$$= \text{ج ث دلا} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \text{ج ث دلا}$$

(۴۲)

اور اس کے نقطہ عالمہ کے محدد ہیں

$$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ دفعہ (۳۷) مثال (۱)}$$

اسی طرح دما کے متوازی دباؤ =  $\frac{1}{3} \times \text{ج ث دلا}$  جن نقطہ

$$(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$$

پر عمل کرتا ہے۔

حاصل انتصابی دباؤ = مائع کا وزن =  $\frac{1}{3} \times \text{ج ث دلا}$  اور خط استقیم =  $\frac{1}{3} \times \text{ج ث دلا}$  کی سمت میں عمل کرتا ہے۔  
تینوں قوتوں کی سمتیں نقطہ

$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

میں سے گذرتی ہیں۔ اور اس لئے وہ ایک تہا قوت

$$\frac{1}{4} \text{ ج ث } \sqrt{8+2\pi}$$

کے مساوی ہیں جو خط مستقیم

$$لا - \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\pi} = (ی - \frac{\pi}{14})$$

$$\text{یعنی} \quad لا = ما = \frac{2}{\pi} ی$$

میں عمل کرتی ہے۔ یہ خط مستقیم مرکز میں سے گذرتا ہے اور ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ تمام سیالی دباؤ گرہ کی سطح پر عمودوار عمل کرتے ہیں۔ یہ خط مستقیم سطح کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہے اس کو دباؤ کا مرکز کہہ سکتے ہیں۔

۴۲۔ وزن دار مائع میں ایک ٹھوس جسم جزاً یا کلاً ڈلوایا گیا ہے اس کی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹھوس کو نکال دیا گیا ہے اور اس کی بجائے اسی قسم کا مائع بھر دیا گیا ہے تو اس پر کا حاصل دباؤ وہی ہوگا جو اصلی ٹھوس پر تھا۔ لیکن اس مائع کی کثیت اپنے وزن اور اس کو گھیرنے والے مائع کے دباؤ کے برابر ساکن ہے۔ اس لئے حاصل دباؤ ہٹا ہے ہوئے مائع کے وزن کے برابر ہوگا اور اس کو مرکز نشی میں سے انتصابی سمت میں عمل کریگا۔

اسی طرح کے استدلال سے صریحاً ثبات ہو سکتا ہے کہ کسی ٹھوس جسم پر پچکدار سیال کا حاصل دباؤ جسم کے ہٹاے ہوئے پچکدار سیال کے وزن کے برابر ہوتا ہے۔

یہ نتیجہ دفعات (۴۰) اور (۴۱) کی مدد سے اس طرح بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سطح کو مس کرتے ہوئے متوازی افقی خطوط مستقیم کھینچو جن سے ایک استوانہ بنے جس کے اندر ٹھوس گھم جائے تھاس کا مخفی سطح کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن پر کے حاصل افقی دباؤ اسطوانے کے محور کے متوازی ہیں اور ایک دوسرے کے مساوی ہیں مگر مقابل ہوں میں عمل کرتے ہیں۔ اس لئے جسم پر کے افقی دباؤ ایک دوسرے کے اخ کو زایل کرتے ہیں اور اس لئے حاصل صرف انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔ اب اس حاصل انتصابی دباؤ کو معلوم کرنے کے لئے سطح کو مس کرتے ہوئے متوازی انتصابی خطوط کھینچو تاکہ سطح دو حصوں میں تقسیم ہو جائے۔ ایک حصہ کا حاصل انتصابی دباؤ اوپر وار عمل کرتا ہے اور دوسرے حصہ

پر کا نیچے وار - ان دونوں کا فرق مصریٰ ٹھوس کے ہٹاے ہوئے سیال کا وزن ہے۔  
۴۳۔ ایک ٹھوس جسم پر سے طہر پر وزن دار مانع میں غرق کیا گیا ہے، اگر اس کی سطح کا کچھ حصہ منحنی سطح اور بقیہ حصہ منکسر مستوی رہے ہوں اور اگر اس کا حجم (ح) دیا جائے تو منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

کیونکہ مستوی سطحوں کا رقبہ اور ان کا محل معلوم ہے اس لئے ہم ان رقبوں پر کے حاصل افقی دباؤ لا اور حاصل انتضابی دباؤ ما معلوم کر سکتے ہیں اور چونکہ جسم کی پوری سطح پر کا دباؤ ج ث ح کے مساوی ہے اور اوپر وار انتضابی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے اس کی منحنی سطح پر کا حاصل افقی دباؤ لا ہوگا اور حاصل انتضابی دباؤ ج ث ح - ما  
مثال - دائری رقبہ کو ایک عاسی خط کے گرد زاویہ طہ میں گھمانے سے ایک ٹھوس جسم بنایا گیا ہے۔ اس کو پانی میں اس طرح تھکانا گیا ہے کہ اس کا پچھلا مستوی رخ افقی اور گہرائی گ ب رہے۔

اس صورت میں

$$ح = \pi ر^2 ط، لا = ج ث ح (گ - وجب ط) جب ط$$

اور  $ما = ج ث ح (گ - گ جسم ط + وجب ط جسم ط)$   
۴۴۔ کسی سطح پر ایک ایسے سیال کا حاصل دباؤ دریافت کرو جو کسی معلومہ قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے۔

فرض کرو کہ سیال کے زیر عمل سطح ع = کے نقطہ (لا، ما، ی) پر کا دباؤ لا ہے جو باب دوم میں حاصل کردہ دباؤ کی طرح معلوم کیا گیا ہے۔

$$تب اگر \frac{1}{ع} = \left( \frac{جف لا}{جف ما} \right)^2 + \left( \frac{جف ی}{جف ما} \right)^2 + \left( \frac{جف ع}{جف ی} \right)^2$$

تو نقطہ (لا، ما، ی) پر کے عماد کے چیرب اقام ہو گئے

$$ع جف لا، ع جف ما، ع جف ی$$

فرض کرو کہ اس نقطہ کو گھیرنے والے رقبہ کا عنصر ص سے تعبیر ہوتا ہے تو محوروں کے متوازی اس عنصر پر کے دباؤ ہو گئے



ما = اگر د فری فرلا

ل = اگر د (ما فرلا فرما - ی فری فرلا)

= اگر د (ما فرما - ی فری) فرلا

ھر = اگر د (ی فری - لا فرلا) فرما

ن = اگر د (لا فرلا - ما فرما) فری

۴۶ — اگر سیال صرف جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہوا اور محور سی انصبا بی ہو تو د، ی کا تفاعل ہوگا جسکو فرض کر دو کہ (ی) ہے۔

تب لا = اگر فہ (ی) فرما فری

مستوی مای پر دی ہوئی سطح کا چغل ہے یہ جملہ صریحاً محور لا کے متوازی اس چغل پر کے دباؤ کو تعبیر کرتا ہے۔

اسی طرح ما مستوی لای پر کے چغل پر کے دباؤ کے مساوی ہے۔  
اگر سیال بے بچک ہو اور صرف جاذبہ ارض اس پر عمل کرے تو د مفت لا مفت ما سیال کے اس حصہ کے وزن کے مساوی ہے جو مفت فن اور سیال کی سطح پر اس کے چغل کے درمیان واقع ہے۔

۴۷ مے یا اگر د فرلا فرما دی ہوئی سطح کے اوپر کے سیال کا وزن ہے۔

یہ نتائج دفعات (۴۰) و (۴۱) کے نتائج کے ساتھ متوافق ہیں۔

۴۸ — اگر ایک ٹھوس جسم جزاً یا کلاً کسی سیال میں غرق کیا جائے اور یہ سیال دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو تو جسم پر کا حاصل سیالی دباؤ ان قوتوں کے حاصل کے مساوی ہوگا جو ہٹائے ہوئے سیال پر عمل کرتی ہیں۔

کیونکہ ہم جسم کو سیال سے غلیحہ کر کے اس کی جگہ کو اسی قسم کے سیال سے پُر کیا ہوا تصور

کر سکتے ہیں۔ اب یہ داخل شدہ سیال ان قوتوں اور گرد کے سیال کے دباؤ کے زیر عمل ساکن ہوگا۔ اور اس لئے حاصل دباؤ ان وی ہونی قوتوں کے حاصل کے مساوی ہوگا مگر سمت متقابل میں عمل کرے گا۔

جسم کی جگہ کو سیال سے بیکرتے وقت قانون کثافت کی پابندی کرنی چاہیے یعنی مساوی کثافت کی ٹھیں گرد کے سیال کی کثافت کی سطحوں کے ساتھ مسلسل ہونی چاہئیں۔

## امثلہ

۱۔ ایک وزندار مونی رسی جس کی کثافت پانی کی کثافت کی دو چند ہے ایک سرے سے جو پانی کے باہر ہے اس طرح نکائی گئی ہے کہ اس کا کچھ حصہ غرق آب رہے۔ غرق شدہ حصہ کے وسط پر رسی کا تناؤ دریافت کرو۔

۲۔ ایک گھوٹلے کرہ کا نصف قطر دہے۔ اسکو پانی سے پھین بھر دیا گیا ہے اس کی سطح کو ایک ایسے مستوی سے جو مرکز کے نیچے ج گہرائی پر واقع ہے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا۔ ان حصوں پر کے حاصل انتصابی دباؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک برتن مخروطی شکل کا ہے جسکا قاعدہ ان ضلعوں والا مستوی کثیر الاضلاع ہے اس کو اس طرح رکھا گیا کہ اس کا محور انتصابی اور اس نیچے وار رہے۔ اس کو سیال سے بھر دیا گیا۔ برتن کا ہر رخ یا پہلو اس پر کے قبضہ کے گرد حرکت کر سکتا ہے لیکن اس کو اپنی جگہ پر قائم رکھنے کے لئے ایک رسی کے ذریعہ اسکو تھاما گیا ہے جو رخ کے قاعدہ کے نقطہ وسطیٰ اور کثیر الاضلاع کے مرکز سے بانڈ دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ہر رسی کے تناؤ اور سیال کے کل وزن میں نسبت ۱:۲ ہے جہاں ۲ افق کے ساتھ ہر رخ کا میلان ہے۔

۴۔ ایک درجہ دوم مرکز نصف دائروں سے گھرا ہوا ہے اور ان کا مشترک قطر آزاد سطح میں واقع ہے ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{3}{4} (b + a) (b + a)$$

$$(b + a + b + a)$$

ہے جہاں ۱ اور ۲ نصف قطر ہیں۔

۵۔ ایک مربع پترے کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جس کا ایک راس سیال کی سطح میں ہے

اگر اس کو اس راس کے گرد اس کے اپنے مستوی میں گھمایا جائے اور پتھر ہمیشہ پورسی طرح مانع میں ڈوبا رہے تو اس کے دباؤ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۶۔ ایک ناقصی پتھر کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو پانی میں عین ڈوبا ہوا ہے۔ اگر اس کو اپنے انتصابی مستوی میں اس طرح گھمایا جائے کہ یہ ہمیشہ پانی میں غرق رہے تو اس کے محوروں کے لمباؤ سے دباؤ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۷۔ ایک مکعب صندوق پانی سے بھر دیا گیا ہے اس کا ڈبکن وزن دار اور ٹھیک بیٹھنے والا ہے اور اس کو چمکتے قبضوں کے ذریعہ ایک کنارہ پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ باری باری سے اسکو قاعدہ کے ہر کنارے کے گرد اتنے زاویہ میں گھمایا گیا ہے کہ پانی عین خارج ہونے لگے۔ ان زاویوں کے ماسوں کا مقابلہ کرو۔

۸۔ ہم محور دائروں کے ایک نظام کو پانی میں اس طرح ڈوبا گیا ہے کہ مرکزوں والا خط ایک دسی ہوئی گہرائی پر رہے۔ ثابت کرو کہ پورے طور پر ڈوبے ہوئے دائری قبضوں کے دباؤ کے مرکز ایک سکانی پر واقع ہوتے ہیں۔

۹۔ ایک نیم قطع ناقص محاورہ ۱۲ اور ۱۵ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو ایسے قطر سے محدود ہے جس کا میلان محور اعظم کے ساتھ  $\frac{1}{4}$  ہے ناقص کی سطح انتصابی ہے اور نظریات کی سطح میں واقع ہے۔

۱۰۔ ایک نیم قطع ناقص اپنے محور اصغر سے محدود ہے اور ایسے مانع میں عین ڈوبا ہوا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اگر محور اصغر مانع کی سطح میں واقع ہو تو خروج المرکز دریافت کرو تا کہ دباؤ کا مرکز ہو سکے۔

۱۱۔ ایک مربع پتھر ۱ ب ج د پانی میں ڈوبا ہوا ہے اس کا ضلع ۱ ب پانی کی سطح میں واقع ہے۔ نقطہ ب سے ج د کے نقطے تک خط مستقیم بے ایسا کھینچو کہ درتوں حصوں پر کے دباؤ مساوی ہوں۔

ایسی صورت میں ثابت کرو کہ

دباؤ کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ: مربع کا ضلع ::  $1.5 : 1.414$

۱۲۔ ایک نصف دائرہ میں سے جس کا قطر مانع کی سطح میں ہے ایک دائرہ کاٹ لیا گیا ہے اس دائرہ کا قطر نصف دائرہ کا انتصابی نصف قطر ہے بقیہ حصے کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

۳۶ ۱۳۔ ایک نصف دائری انتصابی پتھر پوری طرح پانی میں ڈوبا ہوا ہے اس کے محدود کرنے والے قطر کا مرکز ۲ پانی کی سطح میں ہے اور پانی کی سطح کے ساتھ اس قطر کا میلان عد ہے۔ اگر دباؤ کا مرکز ہو اور قطر اور اسے کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{۱۶ + ۲۳}{۳۱۵ + ۱۶} \text{مس عد}$$

۱۳۔ اگر ایک مثلث کے (اسوں کی گہرائیاں مانع کی سطح کے نیچے 'ا' ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ مرکز نقل کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہوگی

$$(ب - ج) + (ج - ا) + (ا - ب)$$

$$۱۲ (ا + ب + ج)$$

۱۵۔ ایک مستوی رقبہ جو ایک سیال میں ڈوبا ہوا ہے اپنے متوازی اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا مرکز نقل ہمیشہ ایک ہی انتصابی خط میں رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) دباؤ کے مرکز کا طرہی قطع زائے جس کا ایک متقارب دیا ہوا انتصابی خط ہے اور (۲) اگر مختلف محلوں میں اس کے مرکز نقل کی گہرائیاں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ اور ان کے متناظر دباؤ کے مرکز کی گہرائیاں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہوں تو

$$= \begin{vmatrix} ک & ۵ & ۶ & (ک - ۵) \\ ک & ۷ & ۸ & (ک - ۷) \\ ک & ۹ & ۱۰ & (ک - ۹) \end{vmatrix}$$

۱۶۔ مکانی کے ایک قطعہ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو وتر خاص سے محدود ہے اور وتر خاص کے ایک سرے پر کا مس مانع کی سطح میں ہے۔

اگر مانع کی سطح اوپر چڑھے اور مکانی مساکن اسے تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز ایک خط مستقیم میں رہتا ہے۔

۱۷۔ ایک مخروط پانی میں پوری طرح غرق ہے۔ اس کے قاعدہ کے مرکز کی گہرائی دی گئی ہے۔ اگر اس کی محب سطح پر کے حاصل دباؤ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہوں جبکہ ان کے ساتھ اس کے محور کے میلان کے مجرب بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ میں تو ثابت کرو کہ

$$ڈ (س - س) + (ڈ ا س - س) + (ڈ س - س) = ۰$$



۱۸۔ محوروں اور منحنی مالا + مالا = ۱۶ کے درمیان فی رقبہ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔ محاور علی القواطم ہیں اور ایک محور سیال کی سطح میں واقع ہے۔

۱۹۔ مانع کی کچھ مقدار دو متوازی مستویوں کے درمیان ہو۔ یہ مانع ایک مرکزی قوت کے زیر عمل ہے جو ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ۔ اگر مستویوں کے ان حصوں کے رتبے جہاں سیال مس کرتا ہے 'ب' ہوں تو ثابت کرو کہ ان حصوں پر کے دباؤں میں نسبت '۱' : 'ب' ہے۔  
۲۰۔ ایک ٹھوس کرہ ایک افقی مستوی پر رکھا ہوا ہے اور ایک مانع میں عین ڈوبا ہوا ہے۔ انتصابی قطریں سے گزرنے والے دو علی القواطم مستویوں سے اس کرہ کو تقسیم کیا گیا ہے۔ اگر کرہ کی کثافت 'ث' اور سیال کی 'ذ' ہو تو ثابت کرو کہ یہ حصے ایک دوسرے سے جدا نہیں ہونگے بشرطیکہ  $\frac{\theta}{\rho} < \frac{\rho}{\theta}$

۲۱۔ زاہد کا ایک متقارب سیال کی سطح میں ہے۔ اس رتبہ کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی معلوم کرو جو ڈوبے ہوئے متقارب ہمنحنی، اور زاہد کی سطح میں کے دو افقی خطوط مستقیم سے محدود ہے۔

۲۲۔ ایک مخروط پانی میں اس طرح ڈوبا ہوا ہے کہ اس کے قاعدہ کا مرکز پانی کی سطح کے نیچے اس کے ارتفاع کے  $\frac{1}{4}$  گہرائی پر واقع ہے۔ اسی قاعدہ اور ارتفاع کا ایک مکانی بنا بھی اس طرح غرق ہے کہ اس کے قاعدہ کے مرکز کی گہرائی سطح کے نیچے وہی ہے جو مخروط کے قاعدہ کے مرکز کی ہے۔ نیز انتصابی سمت کے ساتھ اس کے محور کا میلان بھی وہی جو مخروط کے محور کا ہے۔ یہ میلان کیا ہونا چاہیے کہ ان دونوں مجسموں کی مہذب سطحوں پر کے دباؤ سادہ ہوں۔  
۲۳۔ ایک بند اسطوانہ مانع سے تقریباً بھرا ہوا ہے اور اپنے ایک ٹکونی خط کے گرد جو انتصابی ہے یکساں رفتار سے گھوم رہا ہے۔ اس کی منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کرو۔  
اس کے اوپر کے سرے پر جو دباؤ ہے اس کا نقطہ عمل بھی معلوم کرو۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ جو رقبہ منحنی (۱-۲) حجم = 'ب' کے متقارب اور اس کی 'توس' کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{1}{4} \times \frac{16 + 1 + 16}{16 + 1 + 16}$$

جہاں متقارب سیال کی سطح میں ہے اور منحنی کا مستوی انتصابی ہے۔

۲۵۔ ایک مخروط مانع سے بھر دیا گیا ہے۔ اس کا ڈبکن وزن دار اور ٹھیک بیٹھنے والا ہے اور ایک قبضہ لنگر حرکت کر سکتا ہے۔ اس مخروط کو قبضہ میں سے گزرنے والے ٹکونی خط کے گرد (جو انتصابی ہے) یکساں رفتار سے گھمایا گیا ہے۔ بڑی سے بڑی زاوی رفتار معلوم کرو کہ مانع نکل نہ پڑے۔

۲۶۔ سکروی خول کا ایک حصہ ایک مستوی سے تراش لیا گیا ہے اور بقیہ حصہ کو ایک افقی مستوی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ دائری تراش مستوی کو مس کرے۔ پھر سکو بلند ترین نقطہ پر کے ایک جھوٹے طور رخ کے ذریعہ پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ سکروی خول کا بڑے سے بڑا حصہ دریافت کرو چکاٹ لیا جاسکے اس طرح کہ پانی باہر نکل چلنے نہ پائے خواہ خول کتنا ہی ہلکا ہو۔ ایسی صورت میں ثابت کرو کہ خول پر کا پورا دباؤ مانع کے وزن کے ساتھ ۲ : ۱ کی نسبت رکھتا ہے۔

۲۷۔ اگر ایک غرق شدہ مستوی رقبہ اپنے مستوی میں کے ایک خط مستقیم کے گرد گھومے تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز اس مستوی میں ایک خط مستقیم مرتسم کرتا ہے۔

۲۸۔ ایک گیس کا گناہ ۲۵ ہے اس کے رخ افقی اور انتصابی ہیں۔ اس کے گرد ایک وزن دار رکھتے ہیں جس کا حجم ۸ { ۱ - ۱۰ - ۱۱ } ہے مانع پر ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جو گیس کے مرکز کی طرف مائل ہے اور ایسی بدلتی ہے جیسے اس مرکز سے فاصلہ۔ فاصلہ اور پرتوت کی مقدار ہے۔ اگر اس سطح کی شکل اور کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر ایک انتصابی رخ اپنے مستوی کے ایک افقی خط مستقیم کے گرد حرکت کر سکے تو ثابت کرو کہ یہ رخ ساکن ہوگا بشرطیکہ خط اس رخ کے زیرین کنارے سے  $\frac{1}{2}$  فاصلہ پر واقع ہو۔

۲۹۔ ایک ٹھوس مکافی نما ماسک میں سے گزرنے والے مستوی سے تراشا گیا ہے جو اس کے محور پر غلبی القوائم ہے۔ یہ مکافی نما پوری طرح مانع میں غرق ہے اس طرح کہ اس کا اس دی ہوئی گہرائی پر پہنچے اور اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ دیا جواد یہ بناتا ہے۔ اس کی سطح پر کے حاصل آباد کی نسبت اور اس کی مقدار معلوم کرو۔

۳۰۔ ایک مکافی رقبہ و تو خاص سے محدود ہے۔ اس کو تر خاص کے گرد زاویہ طہ میں گھما کر ایک ٹھوس بنایا گیا ہے اور اس ٹھوس کو پانی میں اس طرح تھما گیا ہے کہ یہ عین غرق رہے اور اس کا پچھلا مستوی رخ افقی رہے۔ اگر سطح پر کے حاصل دباؤ کا میلان افقی کے

ساتھ نہ ہو تو ثابت کر دو کہ

۳ جب ۲ طس نہ = ۵ جب ط - ۳ جب ط جہ ط - ۲ ط  
۳۱ — سیال کی کچھ کیت ایک محور کے گرد اضافی توازن میں لگھوم رہی ہے۔ یہ سیال قانون قدرت کی بموجب کشش کرتا ہے۔ اس میں ایک چھوٹا ذرہ داخل کر دیا گیا ہے اور اس کو وہی رفتار دی گئی ہے جو کہ اس جگہ کے سیال کے ذرہ کی ہے۔ کیا اپنی حرکت میں یہ محور کی طرف آئے گا یا اس سے پرے بٹے گا۔

۳۲ — سیال کی ایک غیر محدود کیت میں دو خول داخل کئے گئے ہیں۔ سیال کی کثافت دث ہے اور اس کا ہر حصہ ہر دوسرے حصہ کو قانون قدرت کے بموجب جذب کرتا ہے خولوں کے اندرونی دہیر دتی نصف قطر علی الترتیب (۱) ب اور (۲) ب ہیں اور ان کی کثافتیں  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{4}$  ہیں۔ خول بھی ایک دوسرے کو اور سیال کو قانون قدرت کے بموجب جذب کرتے ہیں ہر خول پر کی حاصل قوت معلوم کرو اور ثابت کر دو کہ بعض صورتوں میں یہ قوت وافی ہوگی۔

۳۳ — ایک دیا ہوا رقبہ انتصابی طور پر ایک وزن دار مائع میں غرق ہے اس رقبہ کو قاعدہ مان کر ایک مخروط بنایا گیا ہے جو کہ مائے مائع میں غرق ہے اس کا طریق معلوم کرو جبکہ مخنی سطح پر کا حاصل دباؤ مستقل ہو اور ثابت کر دو کہ یہ دباؤ غیر متغیر رہے گا اگر مخروط کو اس افقی خط کے گرد گھمایا جائے جو قاعدہ کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور قاعدہ کے مستوی پر عمود وار ہے۔

۳۴ — ایک مخروطی برتن کو جس کا محور انتصابی اور اس نیچے وار ہے محور میں سے گزرنے والے ایک مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان حصوں کو اس پر کے ایک قبضہ اور ایک ڈوری کے ذریعہ جو برتن کے کنارہ کا قطر ہے اور حاصل مستوی پر عمود وار ہے جدا ہونے سے روکا گیا ہے۔ اگر برتن کو پانی سے بھردیا جائے تو رسی کے تناؤ کا پانی کے وزن کے ساتھ مقابلہ کرو۔

(۲۸)

۳۵ — ایک کھوکھلے مخروط کو جسکی چوٹی کھلی ہے پانی سے بھردیا گیا ہے اس کے محور میں سے گزرنے والے دو مستویوں سے (جن کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہے) مخروط کے ایک طرف جو سطح کا حصہ کٹتا ہے اس پر کا حاصل دباؤ اور اس کا خط عمل معلوم کرو۔

اگر زاویہ اس قائمہ ہو تو ثابت کر دو کہ یہ خط مخروط کی چوٹی کے مرکز میں سے گزرے گا۔  
۳۶ — ایک برتن ناقصی مکانی شکل کا ہے اس کا محور انتصابی ہے اور اس کی سادات

لا  $\frac{2}{3}$  + با  $\frac{1}{3}$  = ی  $\frac{1}{3}$  ہے۔ صدری مستویوں سے اسے چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان میں سے ایک حصہ میں گ گہرائی تک پانی ڈالا گیا ہے۔ اگر منحنی حصہ پر کے حاصل دباؤ کو انتصابی اور افقی سمت میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کر دو کہ افقی جزو تحلیل کا خط عمل نقطہ (۱۶، ۱۷) (ب، ۱۷) (گ، ۱۷) میں سے گزریگا۔

۳۷۔ نصف کرہ کی شکل کا ایک پیار پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر اسکو ایک ایسے مستوی سے تراشا جائے جو اس کے مرکز سے گزرتا ہے اور افق کے ساتھ دیا ہوا زاویہ بناتا ہے تو پیاسے کے اوپر کے حصہ پر حاصل دباؤ کی سمت اور مقدار دریافت کرو۔

۳۸۔ ایک کھلے مخروطی خول میں جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے پانی بھر دیا گیا ہے اور اس کے کنارے کے ایک نقطہ سے اس کو ہٹا کر توازن کا محل بتدریج اختیار کرنے دیا گیا ہے۔ اگر اس کا زاویہ راس جہم  $\frac{2}{3}$  ہو تو ثابت کر دو کہ پانی کی سطح نقطہ تعلیق میں سے گزرنے والے تکونی خط کو نسبت ۲:۱ میں تقسیم کرے گی۔

۳۹۔ ایک متعلقہ الاصلی جو پوری طرح مائع میں غرق ہے اپنے مرکز ثقل کے گرد حرکت کر سکتا ہے ثابت کر دو کہ دباؤ کے مرکز کا طریق ایک کرہ ہے۔

۴۰۔ ایک نصف کرہ کی ظرف پانی سے بھر دیا گیا ہے اور اس کے وسطی نصف قطر میں سے دو انتصابی مستوی کھینچے گئے ہیں۔ جو سطح کو نصف چھانک میں تراشتے ہیں۔ اگر مستویوں کا دباؤ زاویہ ۲۰ ہو تو ثابت کر دو کہ اس چھانک پر حاصل دباؤ انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ

مس (جہ)

بناتا ہے۔

۴۱۔ نیم قطب کا ایک ثابت کرہ ہے اس کو دھکنائیت والے سیال کی گیت  $\frac{2}{3}$  احاطہ کئے ہوئے ہے یہ سیال ایک ایسے نقطہ کی طرف قوت مددنی کا فی گیت سے جذب ہوتا ہے جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ج ( $> ب$ ) ہے۔ بیرونی دباؤ کو صفر فرض کر کے ثابت کر دو کہ حاصل دباؤ دریافت کرو۔

۴۲۔ گزشتہ مسئلے کی شکل کا ایک کرہ اس وقت جب تک کہ اس کو اس طرح رکھیں

کہ اس کا محور انتصابی رہے اور پھر پائی کی کوئی مقدار اس میں ڈال دیں اور اس کے محور میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی سے اس کو دو حصوں میں تقسیم کریں تو کل غرق پر کا حاصل انتصابی دباؤ اس حصہ پر کے حاصل افقی دباؤ کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔ اس طرح کی شکل معلوم کرو۔

۴۳۔ ایک منحنی انتصابی محور کے گرد متناقل ہے اگر اس کو مانع میں اس طور پر غرق کیا جائے کہ سب سے اونچے نقطہ کی گہرائی سب سے نیچے نقطہ کی گہرائی کی نصف ہو تو اس کے دباؤ کا مرکز محور کی تعصیف کرتا ہے۔ اس کی مساوات دریافت کرو۔

۴۴۔ ایک مستطیلی رقبہ پکدار مانع میں اس طرح غرق ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے اور اس کا ایک ضلع مانع کی سطح میں ہے جہاں دباؤ صفر ہے۔ اگر کثافت دباؤ کا خطی تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{\frac{1}{m} \times \{ (1-m) \theta + (-1 + \frac{1}{m}) \theta \}}{\theta - (1+m) \theta}$$

جہاں انتصابی ضلع کا طول ۱ ہے اور رقبہ کی چوٹی پر کثافت  $\theta$  اور اس کے پائیں پر کثافت  $\theta$  ہے۔ اور

$$m = \text{کوک} \left( \frac{\theta}{\theta} \right)$$

۴۵۔ ایک مثلثی پترے کے راس  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ایک متجانس مانع میں بالترتیب گ، گ، گ گہرائیوں تک غرق ہیں۔ اگر  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  سے  $\beta$ ،  $\gamma$ ،  $\alpha$  ب، ب، ب پر عمودی بالترتیب ع، ع، ع ہوں تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کے خطی (Trilinear) محدد ہونگے

$$\frac{g}{m} \left( 1 + \frac{g}{g + g + g} \right) \frac{g}{m} \left( 1 + \frac{g}{g + g + g} \right) \frac{g}{m} \left( 1 + \frac{g}{g + g + g} \right)$$

۴۶۔ ایک مثلثی پترہ ایک متجانس مانع میں پوری طرح غرق ہے۔ اس کے راسوں کی گہرائیاں  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ہوں اگر مثلث کے دباؤ کا مرکز راسوں پر اضلاع  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  کے وسط مرکز پر

منطبق ہو جائے تو ثابت کر دو کہ

ف : ق :: ۳ : ۲ - (م + ن) : ۳ - م - (ن + ل) : ۳ - ن - (ل + م) : ۳  
 ۴ — ایک مکعب صندوق کے ضلع کا طول دے اور اس کے وزن دار ڈھکن کا وزن  
 دے جو ایک کنارے کے گرد حرکت کر سکتا ہے۔ صندوق کو پانی سے بھر دیا گیا ہے اور اس  
 کنارہ کے ایک سرے میں سے گزرنے والے قطر کے ذریعہ اس کو انتصابی طور پر لٹکایا گیا ہے  
 اب اگر اس کو یکساں زاوی رقرار سے گھمایا جائے تو ثابت کر دو کہ

$$\left( \frac{4}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}} \right) \left( \frac{1}{3} \right)$$

سے کم نہ ہونا چاہیے تاکہ بانی گرنے جائے جہاں و صندوق کے اندرونی پانی کا وزن ہے —  
 ۴۸ — ایک ناقص نما کو مرکز میں سے گزرنے والے کسی مستوی سے تراش کر اس کی منحنی سطح  
 اور مستوی تراش سے ایک بند اسٹوار برتن تیار کیا گیا ہے۔ برتن کو پانی سے عین بھر کر ایک افقی  
 میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ مستوی قاعدہ میز پر ٹکا رہے۔ ثابت کر دو کہ منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ  
 ایک انتصابی قوت کے مساوی ہے جو پانی کے نصف وزن کے مساوی ہے اور جس کا  
 خط عمل مستوی قاعدہ کو مرکز سے ۳/۴ (۳/۴ - ۱/۴) فاصلہ پر قطع کرتا ہے جہاں قاعدہ کا  
 مزدوج نصف وتر اور غ مرکز سے افقی مماسی مستوی پر عمود ہے۔

۴۹ — ایک چھوٹا ٹھوس جسم ایک سیال میں ساکن رکھا گیا ہے جس میں کسی نقطہ پر کا دباؤ  
 قائم محدود لا، ما، می کا ایک دیا ہوا تقاضا ہے۔ ثابت کر دو کہ اس جفت کے اجزائے  
 ترکیبی جو جسم کو اس کے مرکز ثقل کے گرد گھمانے کا میلان رکھتا ہے

$$(ج - ب) \frac{فر۲}{فر۱} - \left( \frac{فر۲}{فر۱} - \frac{فر۲}{فر۱} \right) (ع - فر۲) \frac{فر۲}{فر۱}$$

$$+ ف \frac{فر۲}{فر۱}$$

اور اسی طرح کے دو اور جملے ہیں جہاں ا، ب، ج، د، ع، ف مرکز ثقل میں سے  
 گزرنے والے محاورے کے لحاظ سے جسم کے حجم کے مجموعی معیاروں اور جمود کے حاملہوں  
 کو تعبیر کرتے ہیں۔

۵۰۔ ایک استوار کروئی خول کا نصف قطر اس ہے۔ اس میں گیس کی کمیت ک ہے جس میں دباؤ کثافت کا ل گنا ہے۔ گیس ایک ثابت بیرونی نقطہ سے (جس کا فاصلہ مرکز سے ف ہے) ایسی قوت سے دفع ہوتی ہے جو فی اکائی کمیت  $\frac{1}{2} \frac{L}{F}$  کے مساوی ہے۔

ثابت کرو کہ خول پر گیس کا حاصل دباؤ ہے

$$\frac{L}{F} \times \frac{F^2 - 2}{F^2 + 2}$$

۱۔ پانی سے بھر ہوا ایک غرت ناقص نما (محاورہ، ب، ح) کے آٹھویں حصہ کی شکل کا ہے جتین صدی ستویں سے محدود ہے۔ محور انتصابی ہے اور گہرائی کا دباؤ نظر انداز ہو سکتا ہے۔

(۵۰)

ثابت کرو کہ مخفی سطح پر کا حاصل سیالی دباؤ ایک ایسی قوت ہے جس کی شدت ہے

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

۵۱۔ ایک کھوکھلا ناقص نما پانی سے بھرا گیا ہے اور اس طرح رکھا گیا کہ محور افقی کے ساتھ زاویہ عدنائے اور محور ج افقی رہے۔ ثابت کرو کہ محور میں سے گزرنے والے انتصابی ستویں کے ہر طرف کی مخفی سطح پر کا سیالی دباؤ ایک رنج (Wrench) کے مساوی ہے جس کی گہرائی ہے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

۳ ج جب عد حجم عد

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

۵۲۔ ایک مثلث ایک مانع میں غرق ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس مثلث کے اس مانع کی سطح کے نیچے عد، بی، جہ فاصلوں پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

۵۳۔ ایک ستویں بقہ ایک وزن دار غیر متجانس سیال میں کھینٹا غرق ہے اور ایک ایسے

افقی ثابت محور کے گرد گھومتا ہے جو گ گہرائی پر ہے اور مستوی پر عمود وار ہے۔ اگر گ گہرائی پر سیال کی کثافت مہ می کے مساوی ہو اور اگر محور اور مستوی کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے دو علی التوا عمودوں میں سے ہر ایک کے لحاظ سے مستوی رقبہ متساوی ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کا طریق نصف میں ایک قطع ناقص ہے جس کے مرکز کی گہرائی ہے

$$گ (۱ - ۲ ک) (۲ ک + ۱)$$

$$گ - (۲ ک + ۱) (۲ ک + ۱)$$

جہاں متساوی عمودوں کے لحاظ سے رقبہ کے گردش کے نصف قطر ک ک ہیں اور ک رہ ہو انہی کا دباؤ ہے

$$۱ - ۲ ک (۱ - ۲ ک)$$

۵۔ ثابت کرو کہ کسی غرق آب مستوی رقبہ کا دباؤ ایک قوت میں جو رقبہ کے مرکز ہندسی پر عمل کرتی ہے اور ایک جہت میں جو رقبہ کے مستوی میں ایک محور کے گرد ہے تحلیل ہو سکتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس جہت کا محور اُس ماس پر عمود وار ہے جو مرکز ہندسی پر کے معیاری ناقص کے افقی قطر کے سر پر کھینچا گیا ہے۔





## باب چہارم

### تیرنے والے اجسام کا توازن

(۵۱)

۴۸ — تیرنے والے جسم کے توازن کی شرطیں معلوم کرنا۔

ہم یہ فرض کریں گے کہ سیال صرف جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے اور جسم بھی صرف اسی قوت کے زیر اثر سیال میں آزادانہ تیر رہا ہے۔ اس طرح جسم پر عمل کرنے والی قوتیں صرف اس کا وزن اور گرد کے سیال کا دباؤ ہو گا۔ اس لئے توازن کے اتمام کے لئے حامل سیالی دباؤ جسم کے وزن کے مساوی ہو گا اور انتصابی سمت میں عمل کرے گا۔

اب ہمیں یہ معلوم ہے کہ جزا یا کٹا غرق شدہ ٹھوس کی سطح پر کا حامل سیالی دباؤ ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہوتا ہے اور اس کی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں عمل کرتا ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم کا وزن ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہونا چاہیے اور یہ کہ جسم اور ہٹائے ہوئے سیال کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی خط میں واقع ہونے چاہئیں۔

یہ شرطیں توازن کے لئے ضروری اور کافی ہیں خواہ سیال جس میں جسم تیر رہا ہے کسی نوعیت کا ہو۔ اگر سیال غیر متجانس ہے تو ہٹائے ہوئے سیال کو اس طرح خیال کرنا ہو گا کہ وہ بھی جسم کو گھیرنے والے سیال کے قانون کثافت کی پابندی کرتا ہے۔ بالفاظ دیگر اس میں ایسے طبقات فرض کرنے ہونگے جو گرد کے افقی طبقات کے ساتھ مسلسل ہوں نیز اسی قسم کے اور اسی کثافت کے ہوں۔

مثلاً اگر ایک ٹھوس جسم جزا غرق شدہ پانی میں تیر رہا ہو تو اس کا وزن ہٹائے ہوئے پانی کے وزن اور ہٹائی ہوئی ہوائی وزن کے مجموعہ کے مساوی ہو گا۔ اور اگر ہوا کو خارج کر دیا جائے یا اس کے دباؤ کو کثافت یا تپش کی تخفیف سے کم کر دیا جائے

(۵۲)

تو ٹھوس کا کچھ حجم بانی میں اور ڈوب جائے گا جو اس کے وزن اور بانی اور ہوا کی کثافتوں پر منحصر ہوگا۔ اس کی مزید تشریح یوں ہو سکتی ہے کہ ہوا کا دباؤ پانی کی سطح پر بمقابلہ کسی اور پر کے نقطہ پر کے دباؤ کے زیادہ ہے اور ہوا کا یہ سطحی دباؤ پانی کے ذریعہ تیرنے والے جسم کے غرق شدہ حصہ پر منتقل ہو جاتا ہے جس کا یہ نتیجہ ہوتا ہے کہ اس پر ہوا کا ادھر وار دباؤ اس کے نیچے وار دباؤ سے بڑا ہوتا ہے۔

۴۹۔ ہم چند خاص صورتیں لیکر شرائط بالا کے اطلاق کی توضیح کریں گے۔

مثال (۱) ٹھوس مکانی نما کا ایک حصہ جس کا ارتفاع دیا گیا ہے، ایک متجانس مائع میں سطح تیر رہا ہے کہ محور انتصابی اور اس نیچے کی طرف ہے اس کے توازن کا محل معلوم کرو۔

تکوینی مکانی کے وتر خاص کو ۴، ارتفاع کو ۴، اور اس کی گہرائی کو ۲ سے تعبیر کیا جائے تو پورے ٹھوس اور غرق شدہ حصہ کے حجم کی ترتیب ۴ × ۴ × ۲ = ۶۴ اور ۴ × ۴ × ۲ = ۶۴ ہو گئے۔ اور اگر ٹھوس اور مائع کی کثافتیں ۱۰۰۰ ہوں تو توازن کی ایک شرط ہے

$$۴ \times ۴ \times ۲ = ۴ \times ۴ \times ۲$$

$$\frac{۴}{۱۰۰۰} = \frac{۴}{۱۰۰۰}$$

جس سے غرق شدہ حصہ کا تعین ہو جاتا ہے۔ دوسری شرط صریحاً پوری ہوتی ہے۔  
مثال (۲) ایک مربع پترا ایک مائع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چند ہے انتصابی تیر رہا ہے۔ اس کے توازن کے محل معلوم کرو۔

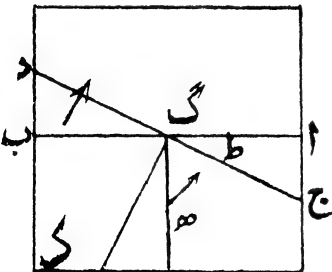
شرائط توازن صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر پترے کا نصف حصہ مائع میں اس طرح غرق ہو کہ وتر انتصابی رہے یا دو اضلاع انتصابی ہوں۔

اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کوئی اور

محل بھی توازن کا محل ہو سکتا ہے یا نہیں۔ فرض کرو کہ پترا اس طرح تھا گیا ہے کہ نصف متقیم دگ ج مائع کی سطح میں ہے۔ اس صورت میں پہلی شرط پوری ہوتی ہے۔

لیکن اگر ج گ ۱ = ط اور مربع کا ضلع

۲ = ط نقطہ گ کے گویائی دباؤ کا معیار جو



مستطیل اسی کے میار اور مثلث گ ب د کے دو چند معیار کے فرق کے مساوی ہے

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \text{جب ط} - \frac{1}{2} \times \text{مس ط} \times \frac{\text{قط ط} + \text{اجم ط}}{3}$$

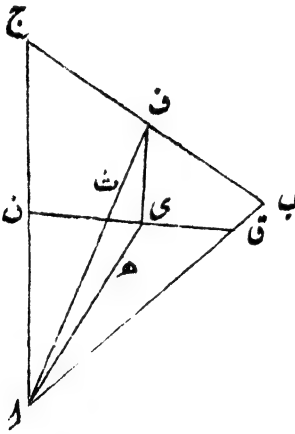
یا جب ط (۱- مس ط)

کے تناسب ہوگا اور یہ اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جبکہ ط = ۱ یا  $\frac{2}{3}$ ، اس لئے توازن کا کوئی دوسرا عمل نہیں ہو سکتا۔

(۵۳)

مثال ۳۔ ایک مثلثی منشور اس طرح تیرا ہے کہ اس کے کنارے افقی ہیں۔ اس کے توازن کے عمل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ شکل ذیل منشور کی وہ تراش ہے جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی سے پیدا ہوتی ہے۔



ن ق تیراؤ کا خط اور ہ ہٹائے ہوئے  
مانع کا مرکز ثقل ہے۔ توازن کی صورت میں  
رجب ا ن ق : رقبہ ا ب ج :: منشور  
کی کثافت : مانع کی کثافت

اور اس لئے ن ق کے تمام محلوں  
کے لئے ا ن ق مستقل ہے۔ اس لئے  
ن ق ہمیشہ اپنے وسطی نقطہ پر ایک ایسے  
زائد کو مس کرتا ہے جس کے متقارب ا ب  
اور ا ج ہیں۔

نیز ہ ت، ن ق پر عمود وار ہونا چاہیے اور چونکہ

$$ا : ہ = ی : ت = ا : ت$$

اس لئے ف ی، ن ق پر عمود وار ہوگا۔ یعنی ف ی زائد کے نقطہ ی پر کا  
عماد ہے۔ اس لئے اب یہ مسئلہ ف سے منحنی پر عماد کھینچنے کے مسئلہ میں متویل ہو جاتا ہے  
فرض کرو کہ محاور ا ب، ا ج کے حوالہ سے منحنی کی مسادات ہے

$$ا ا = ج ج$$

اور مزید ب (ا ج = ط) ، ب = ۱۲ ، (ا ج = ۲ ب  
 نیز فرض کرو کہ نقطہ سے کے محدود (لانا) ہیں۔ ۱۲ ب نقطہ کے محدود ہیں اور  
 نقطہ سے پر کے عماد کی مساوات ہے

$$ع - م = \frac{ماجم ط - لا}{لاجم ط - ما} (فنا - لا)$$

اور اگر یہ نقطہ میں سے گزرے جس کے محدود ۱۲ ب ہیں تو

$$(ب - ما) (لاجم ط - ما) = (و - لا) (ماجم ط - لا)$$

$$یا لا - (و + بجم ط) لا = ما - (و + بجم ط) ما ..... (بہ)$$

مساواتیں (ع) اور (بہ) زائد کے تمام نقطوں کا تعین کرتی ہیں جن پر کے ماس  
 نیز او کے خطوط ہو سکتے ہیں۔

نیز مساوات (بہ) ۱۲ ب (ا ج کے متوازی مزدوج قطروں کے حوالہ سے  
 ایک قائمہ زاؤہ کی مساوات ہے۔ اس لئے ان دونوں زائدوں کے نقاط تقاطع سے کے  
 محل میں۔

مساوات

$$لا - (و + بجم ط) لا + (و + بجم ط) ب (ا ج لا - ج =$$

سے لا معلوم ہو سکتا ہے۔ اس مساوات میں صرف ایک اصل منفی ہے اور ایک یا تین

مثبت اصلیں ہیں۔ اس لئے توازن کے محل تین ہو سکتے ہیں یا صرف ایک۔

اگر منشور اور مال کی کثافتیں نہ اور دشا ہوں تو چونکہ تقبہ ن ا ق

$$= \frac{۱}{۴} ا ن \times ا ق جب ط = ۲ لا ما جب ط = ۲ ج ا جب ط$$

$$اس لئے ۲ ث ج جب ط = ۲ \times ۲ \times ۱ \times ب جب ط$$

$$یا ۲ ث ج = ۲ \times ۱ \times ب$$

جس سے ج معین ہو جاتا ہے۔

فرض کرو کہ منشور متساوی اساتین ہے تو ۱ = ب رکھنے سے لا کو متعین کرنے کی

کی مساوات ہو جاتی ہے

$$لا - ج = ۱ (۱ + جم ط) (لا - ج) = ۰$$

اس میں لا = ج ملتا ہے جس سے لا = ج حاصل ہوتا ہے اور ب ج افقی قرار پاتا ہے جو صریحاً توازن کا محل ہے اور نیز

$$لا = \frac{1}{4} (۱ + جم ط) \pm \left\{ \frac{1}{4} (۱ + جم ط) - ج \right\}$$

$$= ۱ جم ط \pm (۱ جم ط - ج)$$

اس لئے متساوی الساقین منشور کے توازن کا محل صرف ایک ہوگا تا آنکہ  
جم ط < ج

اور چونکہ ت ج = ۱ مثلاً اس لئے یہ

$$جم ط < ۱$$

کے مثل ہے۔

مثال ۴۔ دی ہوئی شکل اور وزن کے غبارہ کے توازن کا محل معلوم کرو جبکہ کردہ ہوائی کے مختلف ارتفاعوں پر پش کے تغیرات نظر انداز کئے جائیں۔

پیش مستقل ہو تو ہی ارتفاع پر ہوا کا دباؤ = ۱۱ تو پش اور اس کی کثافت

$$= \frac{۱۱}{۱۱} \text{ تو پش جہاں } ۱۱ \text{ اس مستوی پر کے ہوائی دباؤ کو تعبیر کرتا ہے جہاں سے ارتفاع}$$

کی پیمائش ہوئی ہے۔ ہوائی ہوئی ہوا متغیر کثافت کے طبقات کے سلسلوں پش ہوگی اور اگر غبارہ کے زیر ترین نقطہ کا ارتفاع ۱۱ ہو اور اس نقطہ سے غبارہ کی کسی افقی ترائش (لا) کا فاصلہ

لا ہو اور ف غبارہ کا ارتفاع ہو تو ہوائی ہوئی ہوا کے ایک طبقہ کا وزن ہوگا

$$\frac{۱۱}{۱۱} \text{ تو ک } \frac{ج (۱ + لا)}{لا}$$

$$\begin{aligned} \text{اور ہٹائی ہو اکا کل وزن} &= \text{ج (ی + لا)} \\ \text{کر جی} &= \text{ک لا فلا} \\ \text{جی} &= \text{جی کر جی لا فلا} \end{aligned}$$

اب چونکہ غبارہ کی شکل دیگئی ہے اس لئے لا لا کا ایک معلوم متفاعل ہے اور اگر غبارہ اور اس کی اندرونی گیس کا وزن و ہو تو ارتفاعی کا تعین و کو ہٹائی ہوئی ہو اس کے کل وزن کے مساوی رکھنے سے ہو جاتا ہے۔

۵۰۔ ایک متجانس ٹھوس جسم کا غرق شدہ ایک مائع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی جسم کی کمیت کے مرکز کی گہرائی معلوم کرد۔

فرض کرو کہ جسم کے بلند ترین اور زیر ترین نقاط کی گہرائیاں  $h_1$ ،  $h_2$  ہیں، اور  $h$  گہرائی پر اس کی افقی تراش کا قعر سے ہے اور اس گہرائی پر مائع کی کثافت  $\rho$  ہے

تو ہٹائے ہوئے مائع کا وزن =  $\rho \times \text{کر جی} \times \text{مری سے فری}$

فرض کرو کہ جسم کے حجم (ح) کے مرکز ہندسی کی گہرائی  $h$  ہے تو

$$\text{ح} \times \text{مری سے فری} = \text{کر جی} \times \text{مری سے فری}$$

(۵۵)

اس لئے ہٹائے ہوئے مائع کا وزن =  $\rho \times \text{مری سے فری} \times \text{ح}$ ، اور اگر جسم کی کثافت  $\rho$  ہو تو اس کا وزن =  $\rho \times \text{ح} \times \text{مری سے فری}$  =  $\rho \times \text{مری سے فری} \times \text{ح}$  یعنی جسم ایک ایسے محل میں تیر رہا ہے کہ اس کے حجم کے مرکز ہندسی کی گہرائی پر مائع کی کثافت جسم کی کثافت کے مساوی ہے۔  
اگر ایک ٹھوس جسم کسی قید کے ماتحت تیر رہا ہو تو توازن کی شرطیں قید کے حالات کی نوعیت پر تبصرہ ہونگی لیکن ہر صورت میں قید کرنے والی قوتوں کا مائع انتصابی سمت میں عمل کرنے کا کوئی نکتہ دوسری قوتیں (سیالی دباؤ اور سم کا وزن) انتصابی عمل کرتی ہیں۔  
مثلاً اگر ٹھوس جسم کا ایک نقطہ ثابت ہو تو توازن کی شرط یہ ہے کہ اس نقطہ کے گرد جسم کے وزن اور ہٹائے ہوئے مائع کے خیال کے وزن کے مہیار مساوی ہونے چاہئیں۔

اگر یہ شرط پوری ہو تو جسم ساکن ہوگا اور ثابت نقطہ پر کا دباؤ ان دونوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔ اور مثال یہ ہو سکتی ہے کہ ہم ایسے ٹھوس جسم پر غور کریں جو بانی میں تیر رہا ہو اور ایک رسی کے ذریعہ لٹکایا گیا ہو جو بانی کی سطح کے اوپر ایک نقطہ سے بندھی ہوئی ہے۔ توازن کی حالت میں رسی انقباضی ہوگی اور اس کے تناؤ اور حاصل سیالی دباؤ (جو ہٹاے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہے) کا مجموعہ جسم کے وزن کے مساوی ہوگا۔ اس لئے رسی کا تناؤ جسم کے وزن اور ہٹاے ہوئے سیال کے وزن کے فرق کے مساوی ہوگا اور یہ دونوں وزن اُن فاصلوں کی نسبت معکوس میں ہونگے جو ان کے خطوط عمل اور ڈوری کے خط کے درمیان ہیں اور یہ تینوں خطوط ایک ہی انقباضی مستوی میں ہونگے۔

۵۲۔ آئندہ کی تحقیق میں حسب ذیل ہندی سنلے کا ارتد ثابت ہونگے۔

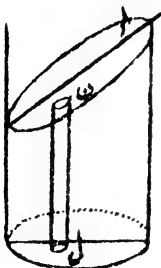
اگر ایک مستوی سطح ایک ٹھوس جسم کو قطع کرے اور اس مستوی کو ایک بہت چھوٹے زاویہ میں ایسے خط مستقیم کے گرد گھمایا جائے جو اسی مستوی میں واقع ہو تو قطع کردہ حجم دہی رہے گا بشرطیکہ خط مستقیم مستوی تراش کے رقبہ کے مرکز ہندی میں سے گزرتا ہو۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے کسی قسم کے ایک اسطوانہ پر غور کرو جس کو ایسی مستوی سطح قطع کرتی ہے جو اس کے قاعدہ کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔

فرض کرو کہ تراش کے مرکز ہندی کا فاصلہ اسطوانہ کے قاعدہ سے  $ح$  ہے اور تراش کے رقبہ کا عنصر  $ل$  اور مستویوں کا درمیانی حجم  $ح$  ہے تو

$$ح = \frac{ل \times ن}{۲}$$

$$ن = ل \times ح = ح (ل \times ح) = ح (ل \times ح)$$

$$ح = ح (ل \times ح) = ح (ل \times ح)$$



اب رقبہ  $ل$  کا مرکز ہندی اُن تمام تراشوں کا

مرکز ہندی ہے جس نقطہ میں سے گزرنے والے مستوی سطح کرتے ہیں۔ یہ بات ان تراشوں کے ظل اسطوانہ کے قاعدہ پر پڑنے سے بخوبی ظاہر ہو جاتی ہے۔

اب چونکہ تمام تراشوں کے لئے  $ح$  دہی ہے

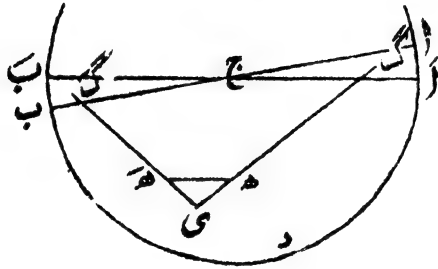




اگر جسم اس طرح حرکت کرے کہ پٹائے ہوئے نائے کا حجم نہ بدلے تو تیراؤ کی مستوی سطحوں کے لغاف کو تیراؤ کی سطح اور ھ کے طرئی کو اچھال کی سطح کہتے ہیں۔

۵۔ اگر ایک مستوی حرکت کرے اس طور پر کہ اس سے ایک ٹھوس جسم کا ہمیشہ مستقل حجم قطع ہو اور اگر قطع شدہ حجم کا مرکز ہندسی ھ ہو تو ھ پر اس سطح کا ماسی مستوی جو ھ کا طرئی ہے قاطع مستوی کے متوازی ہوگا۔

دوسرے الفاظ میں تیراؤ کی سطح کے کسی نقطہ پر اور اچھال کی سطح کے متناظر نقطہ پر کے ماسی مستوی ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔



قاطع مستوی ا ج ب کو ایک جھوٹے زاویہ میں بھراؤ فرض کر دو کہ اس کا نیا مقام ا ج ب ہے قانون ا ج ا اور ب ج ب کے حجم سادی ہیں۔

فرض کر دو کہ ان قانونوں کے ہندسی مرکز گ، گ ہیں۔  
گ ھ محدودہ میں نقطہ ی کو اس طور پر کہ

ی ھ : ھ گ :: حجم ا ج ا : حجم ا د ب

گ ی کو لاؤ اور نقطہ ھ کو اس طور پر کہ

ی ھ : ھ گ :: حجم ب ج ب : حجم ا د ب

تو ھ، ا د ب کا مرکز ہندسی ہوگا۔

لیکن ی ھ : ھ گ :: ی ھ : ھ گ

اور اس لئے ھ ھ، گ گ کے متوازی ہے۔

جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر زاویہ ا ج ا کو لا انتہا کم کر دیا جائے تو انتہا میں



سطح ہوگی جو صریحاً سطح ہوتی کے متشابہ ہے۔

۵۔ اچھال کے معنیوں کی خاص صورتیں۔

مثلاً منشور کے لئے، بوجب وند (۴۹) تیراؤ کا معنی ن ق کا فاف ہے جو ایک زائد ہے جس کے تقارب ڈ ب، ج ہیں اور چونکہ ڈ ہ = ۲/۳ ڈ ی اس لئے اچھال کا معنی ایک متشابہ زائد ہے۔

اگر جسم ایک مستوی پتہ ہو جو ایک مکانی سے محدود ہے تو تیراؤ اور اچھال کے معنی مساوی مکانی ہونگے۔

لیکن اگر پتہ ناقصی توں سے محدود ہو تو معنی ہم مرکز ناقص ہونگے جو باہم متشابہ اور متشابہ طور پر واقع ہونگے۔

اگر کسی پتہ (یا منشور) کا غرق شدہ حصہ متغیل ہو تو تیراؤ کا معنی صریحاً ایک تہنا لفظ ہوگا اور اچھال کا معنی ایک مکانی ہوگا۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ تیراؤ کے خط کے مملوں ج ب اور ج ب کے جواب میں بندسی مرکزوں کے مقامات ہ، ہ ہیں۔

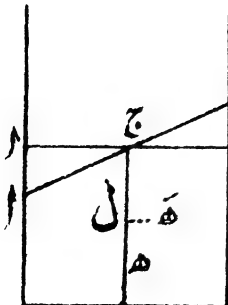
اگر ج = ج ب = ڈ ب ب = ہ، ج ہ = ج، س = کل رقبہ جو قطع ہوتا ہے

تو س = س × ہ ل = ۱/۲ × ہ × ۲/۳ - ۱/۳ × ہ × (۲/۳ - ۱/۳) = ۱/۳ × ہ

س لا = س × ہ ل = ۱/۳ × ہ × (ج + ۲/۳) - ۱/۳ × ہ × (ج - ۲/۳)

$$= \frac{1}{3} \times ہ$$

اور س لا = ۲/۳ × ہ



یہ مثلاً منشور کی خاص صورت سے اور جیسا دہاں یہاں بھی تیراؤ کی اور اچھال کے معنی متشابہ معنی ہیں۔ درحقیقت تیراؤ کا معنی ایک مکانی ہے جس کا س ج ہے جو چپٹا ہو کر ایک خط مستقیم بن گیا ہے۔

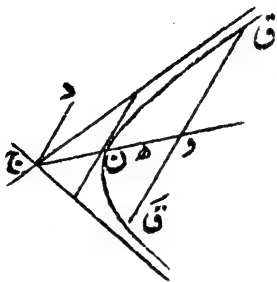
مثال (۲) وند ۹ کی صورت میں س = ۲/۳

اور اچمال کا منحنی مکانی ۳۱ = ۲۱۲ لا ہے۔

اس مکانی کے راس ہ پر انحناء کا نصف قطر ۱۲۱ ہے جو گ سے کم ہے۔  
اس طرح ظاہر ہے کہ اچمال کے منحنی کے تین عماد کھینچ سکتے ہیں جن سے توازن کے تین محل ملیں گے۔

۵۸۔ اگر جسم ایک پترا ہو جو زائد سی قوس سے محدود ہو تو منحنی متشابہ بنا دیں گے۔

اگر ق قی تیراؤ کا خط ہو اور ۲ و ۲۱ ب



ق قی کے متوازی اور اس کے مزدوج قطر  
ہوں اور ان کے درمیان زاویہ طہ ہو اس طرح  
کہ وبتہ جب طہ = و ب ، تو

رقبہ ق قی =  $\frac{1}{3} \pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = 0$  جب طہ فرلا

$$= \left\{ \frac{1}{3} \pi \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \right\} \text{ لوک} = \left\{ \frac{1}{3} \pi \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \right\}$$

اس طرح آگے کے ساتھ یعنی ج و کو جن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ متقل ہے

نیز

$$(رقبہ) (ج ہ) = \frac{1}{3} \pi \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = 0 \text{ جب طہ فرلا}$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = 0$$

اور اس لئے ج و کو جن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ متقل ہے۔

یہ نتیجہ خالص ہندی استدلال سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں۔

۵۹۔ ایک مستدیر مخروط کی صورت میں جو اس طرح تیرا ہے کہ اس کا اس آزاد سطح کے نیچے تیراؤ کی اور اچمال کی سطحیں گروشی زائد نہ ہوں گی۔

اگر مخروط کا راس و کسی تراش کا محور اعظم ج ج اور اس کا مرکز وک

ہو تو جسم و اب

$$= \frac{1}{n} \times \text{وک} \times \frac{1}{n} \text{ اب} \{ \text{ا و} \times \text{ب و} \text{ ب ا و} \} \frac{1}{2}$$

لیکن وک  $\times$  اب = و ا  $\times$  و ب جب ۲ء  
کیونکہ ہر جلد رقبہ و اب کا دو چند ہے۔ اس لئے حجم مستقل ہونے سے نتیجہ نکلتا ہے کہ  
رقبہ و اب مستقل ہے۔

اس لئے مستوی تراش کے مرکز ہندسی ج کا طریق ایک گردش زاۓدہ بنا ہے اور وہ  
چونکہ وج کا تین چوتھائی ہے۔ اس لئے اچھال کی سطح بھی ایک مشابہ زاۓدہ بنا ہے۔  
۶۰۔ ناقص نما کے لئے اچھال کی اور تیراؤ کی سطحیں۔

اگر ناقص نما کی مساوات  $\frac{1}{n} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$  ہو تو لا = ا عا = ب فنا

ی = ج ط کے اندراج سے یہ مسئلہ ایک کرد عا + فنا + ط ا = ا کے مسئلہ میں تحول ہوتا  
ہے اور اگر ناقص نما کے غرق شدہ حصہ کا حجم ح سے تعبیر ہو تو اس کے جواب میں کرد کا جسم  
ح  
اب ج سے تعبیر ہوگا۔

اب یہ ظاہر ہے کہ یہ حجم قطع کرنے والا مستوی نصف قطر کے ایک کرد کو مس کرے گا  
اس طرح کہ

$$\frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n}) \text{ فرلا} = \frac{1}{b} \text{ ح}$$

$$\frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n})^2 (r + 2) = \frac{1}{b} \text{ ح}$$

نیز حجم جو قطع ہوتا ہے اس کا مرکز ہندسی ایک لیسکرہ پر واقع ہوگا جس کا نصف قطر مر ہے  
جہاں

$$\frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n}) \text{ فرلا} = \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n})^2 \text{ فرلا}$$

$$یا \quad \frac{۳}{۲} = \frac{۲(۱+۲)}{۲+۲}$$

اصلی شکل کی طرف رجوع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تیراؤ کی سطح ایک متشابہ ناقص نما کے جس کے نصف محور روکرب، ر ج میں۔ جہاں

$$(۱) \quad \frac{۳}{۲} = \frac{۲(۱+۲)}{۲+۲} \quad \text{.....}$$

اور اچھال کی سطح ایک اور متشابہ ناقص نما ہے جس کے نصف محور مر'ا، مر'ب، مر'ج ہیں جہاں

$$(۲) \quad \frac{۳}{۲} = \frac{۲(۱+۲)}{۲+۲}$$

زاہد نادر چارہی کے لئے بھی اسی قسم کے نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔

۶۱۔ ناقصی مکافہ نما۔

یہ صورت ناقص نما کے نتائج سے اس طور پر حاصل ہو سکتی ہے کہ ناقص نما کے نتیجوں میں مر'ب، مر'ج کو اس طرح پر مائل ہوتا تھا ہی کیا جائے کہ

لج ← مر'ا اور لج ← مر'ب جہاں مر'ا، مر'ب مکافہ نما کی صدر می تراشوں کے

نصف وتر خاص ہیں۔ اس لئے گوشہ کی طرح اگر ح سے غرق شدہ محدود حجم تعبیر ہو تو

لج ← مر'ا، لج ← مر'ب ہو گا اور مر'ا، مر'ب دونوں مائل ہوں گے۔ اس لئے تیراؤ اور

اچھال کی سطحیں مساوی مکافہ نما ہیں۔ نیز ان کے راسوں اور دس ہوئے مکافہ نما کے

راس میں جو فاصلے ہیں وہ ج (۱-۲) اور ج (۱-۳) کی انتہائی قیمتیں ہیں۔

لیکن دفعہ ۶۰ (۱) سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$ج (۱-۲) = \frac{۳}{۲} = \frac{۲(۱+۲)}{۲+۲} \quad \leftarrow \quad \frac{۳}{۲}$$

اس طرح معلوم مکافہ نما اور تیراؤ کی سطح کے درمیان محور پر کا مقطوعہ ج ہو گا جہاں

$$\frac{ج}{۱۲} = ۲$$

اسی طرح وضع ۴۰ (۲) سے

$$ج (۱-۳) = \frac{ج (۱-۲) (۳+۵)}{۴ (۲+۳)} \leftarrow \frac{۲}{۳}$$

جس سے اچال کی سطح کے لئے متناظر مقطوعہ لیا گیا ہے۔

(۶۲)

۶۲ کسی تراش کا اسطوانہ۔

تیراؤ کی سطح نفت اطہندی کے خط و سے پر ایک نقطہ ہے جو  $ج = ح$  سے حاصل ہوگا جہاں  $ل$  عمودی تراش اور  $ح$  غرق شدہ حجم ہے۔

فرض کرو کہ قاطع مستوی کی مساوات

ی = ل + م + ج ہے اور سدا وقائمہ

میں لیا گیا ہے۔

اچمال کے مرکز کے محدود (لا، ما، می)

ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:-

ح لا = کر لای فرلا فرما، قاعدہ پیکمل بیگیا

= کر لا (ج + ل + م + ما) فرلا فرما

= ل + م + ہ

اسی طرح

ح ما = کر مای فرلا فرما

= ل + م + ب

اور ح می = کر می فرلا فرما

= ل + م + ب + ہ + (ج + ل + م + ما) فرلا فرما

جہاں  $ا = لا$  فلا فلا،  $ھ = لا$  ما فلا فلا،  $ب = لا$  ما فلا فلا

اگر ہم تراش کے صدر می محوروں کو محور لا اور محور ما فرض کریں تو  $ھ = ۰$ ،

اور  $ح - لا = اول$ ،  $ح - آ = ب$ ،  $م - ح = (ح - ج) = \frac{1}{2}(اول + ب م)$

اس لئے اجمال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ب} = \frac{۲ م - ح}{ح}$$

۶۳۔ ایک گردشی مجسم ایسے مانع میں تیر رہا ہے جو ایک انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے گویا یہ گھوم رہے مجسم کا محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔ توازن کی شرط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

گھومنے والے مانع کی کیت میں ایک گردشی سطح کھینچو جس کا محور گھومنے والے مانع کے محور پر منطبق ہو۔ اس سطح کے اندرونی مانع کے توازن پر غور کرو۔ اس مانع پر سیالی دباؤں کا حامل اس کے وزن کے مساوی ہونا چاہیے اس طرح اگر اس مانع کی جگہ کوئی مجسم لے لے تو اس کی سطح پر بھی یہی سیالی دباؤ عمل کریں گے اور اس لئے اس قسم کا مجسم متوازن ہوگا اگر اس کا وزن ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے برابر ہو۔ یہ قابل توجہ ہے کہ خواہ مجسم سیال کے ساتھ گھومے یا ان کی زاوی رفتار مختلف ہو یا یہ ساکن ہو ہر صورت میں نتیجہ بالاصداق آئے گا۔ مثال :- ایک اسطوانہ گھومنے والے مانع میں تیر رہا ہے جس گہرائی تک یہ ڈوبتا ہے اسے معلوم کرو۔

اگر سہ زاوی رفتار ہو تو آزاد سطح کے کوئی مکان کی مساوات اس کے اس کو سہا قرار دینے سے  $سہ = ۲$  ج می ہوگی۔ اور اگر تیراؤ کے دائرہ کے نیچے یعنی اس دائرہ کے نیچے جو آزاد سطح اور اسطوانہ کی سطح کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے اسطوانہ کے قاعدہ کی گہرائی ہی ہو اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر تو ہٹائے ہوئے سیال کا حجم،  $ح$  ارتفاع کے اسطوانہ



کے حجم اور سطح ارتفاع کے مکانی نما کے حجم کے فرق کے مساوی ہوگا۔  
پس اگر اسطوانہ کی کثافت  $\rho$  اور سیال کی کثافت  $\rho_1$  ہو تو

$$\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (1)$$

اور  $\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$  (ن اسطوانہ کا ارتفاع ہے)

۶۴۔ زیادہ عام صورت ایسے جسم کی ہے جو جزاً یا کلاً غرق شدہ ایسے مائع میں تیر رہا ہے جو معلومہ قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور یہی قوتیں جسم کے سالمات پر بھی عمل کرتی ہیں۔ اگر جسم متوازن ہو تو اس پر کی حاصل قوت ہٹائے ہوئے مائع پر کی حاصل قوت کے مساوی ہوگی۔ اور ان قوتوں کے خطوط عمل وہی ہونگے۔

کیونکہ اگر جسم علیحدہ کر لیا جائے اور اس کی جگہ کو ہٹائے ہوئے مائع سے پر کر دیا جائے تو جسم پر سیال کا حاصل دباؤ وہی ہوگا جو ہٹائے ہوئے مائع پر ہے۔ اور اس لئے وہ ہٹائے ہوئے مائع پر کی حاصل قوت کے مساوی اور متقابل ہوگا۔

مثال۔ مائع کی کچھ کمیت ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ ہے اور جیسے بدلتی ہے جیسے اس مرکز سے فاصلہ ایک ٹھوس جسم کو دی قطار کی شکل کا اس میں جزاً غرق شدہ ساکن ہے۔ اس کا اس مذکورہ بالا ثابت نقطہ پر ہے مائع اور ٹھوس کی کثافتوں کا مقابلہ کرنا مطلوب ہے۔

توازن کی صورت میں فرض کرو کہ مائع کی آزاد سطح کا نصف قطر اور گروی قطار کا نصف قطر  $r$  ہے۔ قطار کے حجم کو ہٹائے ہوئے مائع کے حجم کے ساتھ  $\rho_1$  کی نسبت ہوگی اور قوت کے مرکز سے ان کی کمیتوں کے مرکزوں کے فاصلے  $h$  اور  $h_1$  کی نسبت رکھیں گے۔  
اگر کثافتیں  $\rho$  اور  $\rho_1$  ہوں تو  $\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$

## امثلہ

۱۔ دو قائم ہم محور مخروطوں کو جن کے راسی زاوئے وہی ہیں راسوں سے جو دو کواکب ہم نوا لگائے ہیں اس کا ایک برتن میں اس طرح رکھا گیا کہ اس کا ایک برابر برتن کے افقی قاعدہ پر چکا ہوا ہے

پھر اس میں پانی ڈال دیا گیا ہے اگر اوپر کے مخروط کا ارتفاع نیچے کے مخروط کے ارتفاع کا تین گنا ہو اور ان کی مشترک کثافت پانی کی کثافت کا  $\frac{1}{3}$  ہو تو ثابت کرو کہ جسم عین آئینے کو ہو گا جبکہ پانی اس کے اوپر کے سرے کے سستی تک پہنچ جائے۔

۱۔ معلومہ وزن اور حجم کا ایک مخروط نیچے وار اس کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ مخروط کی سطح جسکو دائرے میں کرنا ہے کم سے کم ہوگی جبکہ اس کا زاویہ راس  $2$  مس  $\frac{1}{2}$  ہو۔  
 ۲۔ ایک مربع تختہ ایک دائرے کے اندر جس کی کثافت اس کی تختہ کا چار گنا ہے رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے تیرنے کے چار مختلف محل ہو سکتے ہیں جبکہ اس کا صرف ایک معلومہ کونہ دائرے کی سطح کے نیچے ہو۔

۳۔ ایک جسم پانی میں تیر رہا ہے۔ ایک کھوکھلے برتن کو اندھا کر کے اس پر رکھا گیا ہے اور اسے نیچے ڈال دیا گیا ہے۔ جسم کے محل میں کیا اثر توقع پذیر ہوگا (۱) بلحاظ برتن کے اندر فی لمبائی کی سطح کے (۲) بلحاظ برتن کے بیرونی لمبائی کی سطح کے۔

۴۔ ایک کھوکھلے نصف کرہ کی خول کے کنارہ کے ایک نقطہ پر ایک وزندار ذرہ لگا دیا گیا ہے خول پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ ذرہ پانی کی سطح کے عین اوپر ہے، اور کنارہ کی سطح پانی کی سطح کے ساتھ زاویہ  $54^\circ$  بناتی ہے ثابت کرو کہ

نصف کرہ کا وزن : اس پانی کا وزن جو اس میں ساکن رہا ہے  $7/4 : 5 : 6$   
 ۱۔ ایک مخروط جس کا نصف زاویہ راس  $30^\circ$  اور محور کا طول  $1$  ہے انتہائی محور اور نیچے وار اس کے ساتھ ایک سیال میں تیر رہا ہے جس کی کثافت مخروطی کی کثافت کا  $\frac{1}{2}$  ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے قاعدہ کا محیط عین ڈوب جائیگا۔ اگر سیال، مثل ٹھوس کے، مخروط کے محور پر منطبق ہوئے والے انتہائی خط کے گرد  $\frac{1}{2}$  کی زاویہ رفتار سے گھومے۔

۲۔ ایک ٹھوس مخروط کو اس کے محور میں سے گزرنے والے متوسی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ہر حصے ایک قبضہ کے ذریعہ راس پر جوڑ دے گئے ہیں اور اس نظام کو پانی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ راس نیچے وار اور محور انتہائی ہو۔ اگر حصوں کی علیحدگی کے بغیر یہ نظام تیر رہا ہو تو ثابت کرو کہ ڈوبے ہوئے محور کا طول  $2$  جب عد سے بڑا ہے جہاں مخروط کے محور کا طول  $1$  ہے اور اس کا زاویہ راس  $2$  عد ہے۔

۳۔ ایک مخروط کا راس ایک برتن کے پینڈے پر جس میں پانی ہے ثابت کرو کیا گیا ہے۔

یہ مخروط اسطور پر توازن میں ہے کہ اس کا مائل ضلع انتصابی اور اس کے قاعدہ کا زیر ترین نقطہ پانی کی سطح کو عین مس کرتا ہے۔ مخروط کی کثافت کا پانی کی کثافت سے مقابلہ کرو۔

۹۔ منحنی  $\frac{1}{4}$  - لوک  $\frac{1}{4}$  کے کچھ حصہ کو اس کے متقارب کے گرد گھما کر ایک پیالے کی منحنی سطح بنائی گئی ہے یہ پیالہ ایک مائع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور تنگ سرانچے وار ہے اور اس میں ایک زیادہ ترورنی مائع ڈال دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر پیالے کو مناسب وزن کا بنایا جائے تو دونوں مائعوں کی سطحوں کے درمیان فاصلہ مستقل رہے گا۔

۱۰۔ ایک اسطوانہ ایک مائع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ مس -  $\frac{1}{4}$  بناتا ہے اور اس کا اوپر وار سر مائل کی سطح کے عین اوپر ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کا نصف قطر اسکے ارتفاع کا  $\frac{1}{2}$  ہے۔

۱۱۔ ایک ہی شے سے بنے ہوئے دو ڈنڈوں کے سرے باندھ دے گئے ہیں اور یہ ڈنڈے ایک مائع میں اس طرح تیر رہے ہیں کہ ان کا زاویہ مائع میں غرق ہے۔ ثابت کرو کہ چھال کا منحنی مکانی ہے۔

۱۲۔ ایک مخروط نیچے وار اور اس کے ساتھ پانی کے ایک اسطوانی برتن میں تیر رہا ہے۔ اسکو بغیر جھکانے کے پانی کی سطح سے عین باہر نکالا گیا ہے ثابت کرو کہ کام جو کیا گیا وہ ہے

(۳۱ -  $\frac{1}{4}$  ل)

جہاں مخروط کا وزن دہے اور توازن کی حالت میں مائل کی سطح کے نیچے اس کی گہرائی ل ہے اور ل اسطوانہ کا ۱۰۰ طول ہے جو توازن کی حالت میں مخروط کے ہٹاے ہوئے پانی سے بھرا جاسکتا ہے۔

۱۳۔ ایک قائم مستدیر اسطوانہ اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ایک سر غرق ہے۔ تیرا محور اچھال کی سطحیں معلوم کرو۔

۱۴۔ تجانس مادے کی ایک دسی ہوئی مقدار سے ایک گروہنی مکانی نما بنایا گیا ہے جو نیچے وار اس کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ تیراؤ کے مستوی سے اس کے مرکز نقل

کے فاصلہ کا مربع وتر خاص کے متناسب معکوس میں ہوگا۔

۱۵۔۔۔۔۔ چھوٹی موشائی کا ایک کھوکھلا نصف کروی پیا لہ ایسے ڈھکنے سے بند ہے جو اسی شے کا بنا ہوا ہے اور موشائی دہی ہے جو پیا لہ کی ہے۔ اگر پیا لہ ایک مانع میں تیر رہا ہو اسطور پر کہ اس کا مرکز مانع کی سطح میں ہو تو ثابت کرو کہ ڈھکنے کا میلان انتصابی سمت کے ساتھ ہے۔

۱۶۔۔۔۔۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا مستوی قاعدہ ناقص کی شکل لے رہے۔ یہ مخروط اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا طویل ترین کون افقی ہے۔ اگر زاویہ راس ۲۰° ہے اور مستوی قاعدہ سے اور قلیل ترین کون کا درمیانی زاویہ یہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$5 \text{ مم } = 5 \text{ مم } - 2 \text{ مم} - 3 \text{ مم}$$

۱۷۔۔۔۔۔ اگر ایک قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع قاعدے کے قطر کے مساوی ہو تو مخروط اپنے سے بڑی کثافت والے کسی مانع میں تیر لگا اس طور پر کہ اس کا مائل ضلع افقی ہو۔

۱۸۔۔۔۔۔ ایک مخروط کا ارتفاع ۴ اور زاویہ راس ۲۰° ہے اس کا راس ایک مانع کی سطح کے نیچے گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں اس کا قاعدہ مانع کے عین باہر ہوگا اگر

$$\text{ثقل} = \frac{1}{2} \text{ جم } = \frac{1}{2} \text{ (جم - ط) } + \frac{1}{2} \text{ (ط + جم)}$$

جہاں ث اور ط بالترتیب مانع کی اور مخروط کی کثافتیں ہیں۔ اور ط مساوات

$$\text{گ جم } = \text{ث جم} + \text{ط جم}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۹۔۔۔۔۔ ایک ذرا بڑا اسطوح (چار سطحی) پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ایک کونہ غرق ہے اس کونہ پر لٹنے والے تینوں کونوں سے مساوی اور ایک دوسرے کے علی القوام ہیں۔ ثابت کرو کہ توازن کے محل ایک، یادو، یا تین ہوں گے۔ بموجب اس کے کہ چار سطحی کی کثافت کو پانی کی کثافت سے جو نسبت ہے وہ ۴:۲۷ سے بڑی ہو یا مساوی یا چھوٹی۔

۲۰۔۔۔۔۔ ایک نصف کروی خول (نصف قطر ۱) جس میں پانی ہے اپنے محور کے گرد جوا انتصابی ہے  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$  کی زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ ایک کرہ (نصف قطر ۱)

پانی پر ساکن ہے اس طور پر کہ اس کا زیر ترین نقطہ خول کو مس کرتا ہے اور خول پر کوئی دباؤ نہیں ڈالتا۔ اگر آزاد سطح خول کی گوریا کنارے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ  
 کرہ کی کثافت : پانی کی کثافت :: ۱۲۸ : ۱۸۹

۲۱۔ ایک متساوی الساقین مثلثی پتھر A B ج (زادیہ ج قائمہ) ایک مائع میں جبکی کثافت ایسے بھتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کی سطح مستوی انتصابی ہے اور اس کا زاویہ ج پانی میں غرق ہے اگر A B انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ  $\frac{\pi}{2}$  + طہ بنائے تو ثابت کرو کہ توازن کے دونوں محلوں میں جن میں A B افقی نہیں ہوتا طہ کی قیمت شکل ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی

$$م جب طہ = (ج ب طہ + جم طہ) \quad (۳)$$

۲۲۔ ایک قائم مستدیر اسطوانہ میں جس کا محور انتصابی ہے مائع کی کچھ مقدار ہے جس کی کثافت ایسے بھتی ہے جیسے گہرائی اس میں مساوی قاعدہ کا قائم مخروط جس کا محور اسطوانہ کے محور پر منطبق ہوتا ہے نیچے وار اس کے ساتھ آہستہ آہستہ غرق ہونے لگے۔ لے لے چھوڑ دیا گیا ہے اگر مخروط توازن میں ہو جبکہ وہ مائع میں عین غرق ہو تو ثابت کرو کہ مخروط کی کثافت اس گہرائی پر مائع کی ابتدائی کثافت کے مساوی ہوگی جو مخروط کے محور کے  $\frac{1}{3}$  طول کے مساوی ہے۔ (۴۶)

۲۳۔ ایک ٹھوس مخروط جس کا ارتفاع F ، زادیہ راس ۲ ع، کثافت ثابت اپنے راس کے گرد حرکت کر سکتا ہے۔ اس کا راس ایک مائع کی سطح کے نیچے گ گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ یہی گہرائی پر مائع کی کثافت مہی ہے۔ مخروط متوازن ہے اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ طہ بنانا ہے اور اس کا قاعدہ مائع کی سطح کے باہر ہے ثابت کرو کہ  
 مہ گ = ۳ جم طہ = ۵ ف م {جم (طہ + ع) + جم (طہ - ع)} \quad (۴)

۲۴۔ ایک کھوکھلا مکافی متابرتن جس میں ایک وزن دار کرہ پڑا ہوا ہے پانی میں تیر رہا ہے۔ اس کے راس پر ایک سوراخ ہونے کی وجہ سے برتن اور کرہ کی درمیانی فضا پانی سے بھری ہوئی ہے۔ اگر کرہ پر کا حاصل دباؤ اس پانی کے نصف وزن کے مساوی ہو جو کرہ کے بھرنے کے لئے درکار ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ پانی کی سطح کے نیچے کرہ کے مرکز کی گہرائی  $\frac{2}{3}$  ج ہے جہاں مکافی مٹا کا وتر خاص ۴ R اور اس سے تماسی مستوی

کا فاصلہ ج ہے۔

۲۵ — ایک قائم مخروط نیچے وار راس کے ساتھ ایک سیال میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدیتی ہے جیسے گہرائی۔ اگر توازن کے محل میں اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ ط بنا سکے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ط قطاہ (جم ط - جب ۲ ع)} = \frac{۳}{۴} \sqrt{\frac{۳}{۴}} \sqrt{\frac{۳}{۴}}$$

جہاں مخروط کا نصف زاویہ راس اور ثلث اس کی کثافت اور ث سیال کی اس گہرائی پر کثافت ہے جو مخروط کے مائل ضلع کے مساوی ہے۔

۲۶ — ایک قائم الزاویہ مثلث منشور ایک سیال میں جس کی کثافت ایسے بدیتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا زاویہ قائمہ غرق ہے اور کنارے افقی ہیں۔ ثابت کرو کہ اجمال کے معنی کی شکل ہے

$$\text{ز جب ۲ ط جم ۴ ط = گ}$$

۲۷ — لنگر چھلے کی شکل کی ایک جان پیٹی ہے جس کی تکوین ایک دائرہ سے ہوئی ہے جس کا نصف قطر ہے۔ یہ جان پیٹی پانی میں تیر رہی ہے اس طور پر کہ اس کے خط استوا میں سے گزرنیوالی مستوی سطح افقی ہے۔ ثابت کرو کہ غرق شدہ گہرائی می مساواتوں

$$\text{ی = ۱ (۱ - جم ب)}$$

$$\text{۲۲ س = (۲ ب - جب ۲ ب)}$$

سے حاصل ہوگی جہاں س جان پیٹی کے ادے کی کثافت نوعی ہے۔

۲۸ — ایک مکافی پیرا ایک دوہرے معین سے محدود ہے جو محور پر غمو دار ہے اور نیچے وار راس کے ساتھ ایک مائع میں تیر رہا ہے اسطور پر کہ اس کا اسکے مائع کی سطح میں ہے اور اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ من اعظم بنا آ رہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی کثافت اور پیرے کی کثافت میں ۲۱۶ : ۳۱۱ کی نسبت ہے اور محدودہ کرنے والے معین کا طول وتر خاص کا تین گنا ہے۔

۲۹ — ایک ٹھوس مخروط جس کا ارتفاع ف، کثافت ث اور زاویہ راس ۲ ع ہے اپنے راس کے گرد آزادانہ گردش کر سکتا ہے۔ اس کا راس مائع کی سطح کے اوپر بلندی د پر ثابت

کر دیا گیا ہے۔ مانع کی کثافت ث ہے اگر مخروط اس طور پر تیر رہا ہو کہ اس کا قاعدہ پوری طرح غرق ہو اور اس کا محور انتصابی سمت کے زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$ف^۴ (ث - ثہ) \{ (جم + ط) (ع) (جم - ط) (ع) \} = دث^۵ جم طہ جم ع$$

۳۰۔۔۔۔۔ انتہا چھوٹا برف کا ٹکڑا جس کی شکل قایم سیدہ اسطوانہ خیال کیجا سکتی ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے۔ جو حصہ غرق ہے اس پر برف کے دوسرے ذرات آکر جھپٹتے ہیں اس طور پر کہ اس کی اسطوانی شکل برقرار رہتی ہے اور اس کے محور اور نصف قطر میں مساوی وقت میں مساوی اضافہ ہوتا ہے۔ غیر غرق شدہ حصہ کی انتہائی شکل معلوم کرو۔ اگر برف کی کثافت اصنافی ۹۶ ہو تو ثابت کرو کہ اس کی سطح منحنی

$$ا^۴ (۹ - لا - ما) = ۲۵$$

کی گردش سے حاصل ہوگی۔

۳۱۔۔۔۔۔ ایک مساوی الاضلاع مثلث ایک مانع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت مثلث کی کثافت کا چار گنا ہے۔ اچھال کی پوری سطح دریافت کرو۔ اور ثابت کرو کہ آن لٹ اسطرح چال انصاف غیر مسلسل ہے منحنی کے تماس زاویہ

$$مس - ۱ = \frac{۳۱۸.۱۲}{۱۰۶}$$

پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

۳۲۔۔۔۔۔ ایک ٹھوس جوہر بنویں لا = ± ما = ± ب ، ی = بی = ج سے محدود ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ قاعدہ ی = ۰ پوری طرح غرق ہے۔

ثابت کرو کہ ایسے ہٹاؤں کے لئے جن میں غرق شدہ حجم مستقل رہے اور قاعدہ پوری طرح پانی کے اندر اور اس کے مقابل کا رخ پوری طرح پانی کے باہر رہے اچھال کی سطح کی مسادات ہے

$$\frac{۱}{۳} - \frac{اوب ی}{خ ۳} = \frac{۲}{ب ۲} + \frac{۲}{ا ۲}$$

۳۳ — کسی عمودی تراش کا ایک اسطوانی ظرف اس طرح تیار ہا جسکے اس کے محور کا  $\frac{1}{2}$  ج طول غرق ہوتا ہے جب کہ محور انتصابی ہو۔ ثابت کرو کہ اچھال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{y}{j} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

جہاں انتصابی حالت میں محور کا جو حصہ غرق ہوتا ہے اس کا وسطی نقطہ مبداء ہے محوری انتصاباً اوپر دار ہے اور محاور لا، ما عمودی حالت میں تیراؤ کی مستوی سطح کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے جمود کے معیاروں کے کھداری محوروں کے متوازی ہیں اور تیراؤ کی سطح کے ان محوروں کے لئے گردش کے نیم قطب ہیں۔



(۸۲)

# پانچواں باب

## تیرنے والے جسموں کے توازن کی قائمیت

۶۵۔ اگر ایک تیرنے والے جسم کے محل میں کسی سمت میں خفیف سا ہٹاؤ پیدا کیا جائے تو عام طور پر جسم یا تو اپنے اصلی محل پر واپس ہونے کی طرف مائل ہوگا یا اس محل سے اور دور ہٹنے کا رجحان رکھے گا۔ ہٹاؤ کی اس خاص سمت کے لئے صورت اول میں توازن کو قائم اور صورت دوم میں غیر قائم کہتے ہیں۔

پہلے اچھوٹے انتصابی ہٹاؤ پر غور کرو۔ اگر جسم متجانس سیال میں جزو غرق شدہ ہو یا ایک غیر متجانس سیال میں جس کی کثافت گہرائی کے ساتھ بڑھتی ہے جزو یا کلا غرق شدہ تیر رہا ہو تو یہ ظاہر ہے کہ اس کو دبا کر نیچے اتار دینے سے ہٹائے ہوئے سیال کا دباؤ بڑھ جائے گا اور برخلاف اس کے اسکو اوپر اٹھانے سے یہ دباؤ گھٹ جائیگا۔ اس لئے ہر صورت میں سیالی دباؤ کا میلان جسم کو اس کے سکون کے محل کی طرف لیجانے کا ہوگا۔ اور اسلئے انتصابی ہٹاؤ کا لحاظ کرتے ہوئے توازن قائم ہے۔

لیکن یہ یاد رہے کہ یہ بات صرف ٹھوس اجسام کے لئے ثابت کی گئی ہے۔ ہٹاؤ کی وجہ سے دباؤ میں جو اضافہ ہوتا ہے اگر اس سے تیرنے والے جسم کے کسی حصہ میں یکساں پیدا ہو جائے تو توازن کا قائم ہونا ضروری نہیں بلکہ فی الحقیقت یہ غیر قائم ہو سکتا ہے۔

کسی اختیاری ہٹاؤ سے عام طور پر جسم کے محل میں انتصابی اور زائد و دونوں تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ لیکن اگر ہٹاؤ چھوٹا ہو جیسا ہم نے

فرض کیا ہے تو جسم کے محل میں ان تبدیلیوں کے اثرات پر الگ الگ غور کیا جاسکتا ہے۔ اب ہم ایک چھوٹے زاویہ میں مٹھاؤ کے اثر پر یہ فرض کر کے غور کریں گے کہ ہٹائے ہوئے سیال کا وزن نہیں بدلتا۔ اور اس لئے سیالی دباؤ جسم کی کمیت کے مرکز کو اٹھانے یا بٹھانے میں کوئی میلان نہیں رکھتا۔

۶۶۔ ایک ٹھوس جسم سکون کی حالت میں ایک متجانس مائع میں تیر رہا ہے اسکو ایک دے ہوئے انتظامی مستوی میں، ایک چھوٹے زاوے میں سے گھمادیا گیا ہے۔ یہ معلوم کرنا مطلوب ہے کہ سیالی دباؤ جسم کو اپنے ابتدائی محل میں لیجانے کا میلان رکھے گا یا نہیں۔

فرض کرو کہ محور ما کے گرد جو تیراؤ کے مستوی اوپ میں واقع ہے جسم کو چھوٹے زاویہ طہ میں سے گھمایا گیا ہے، و ما کاغذ کے مستوی پر علی القواثم

ہے ابتدائی محل میں ولا تیراؤ کے

مستوی میں اور وی انمصاباً

واقع ہے۔ فرض کرو کہ جیسے جسم

گھمایا جاتا ہے یہ محور اس کے

ساتھ ہی جاتے ہیں۔

اگر تیراؤ کے مستوی پر رقبہ

کا عنصر فرما کر اسے تعمیر ہو تو

عنصری ستون ناق کا حجم

می فرما رہا ہوگا جہاں ہی طولِ نِق کو تعبیر کرتا ہے، بیٹائے ہوئے معمول میں

متناظر ستون ن ق کا طول می + لاٹھ اور اسکا حجم (می + لاٹھ) فر لا فر ما ہے

سر ہٹائے ہوئے سال اکا جمح آ دو دنوں صورتوں میں دی ہوگا اگر

سکری (ی + لاط) فرلا فرما = ح = سکری فرلا فرما

جہاں تکملے جسم کی اُس تراش پر لے گئے ہیں جو ابتدائی محل میں تیراؤ کی سطح سے قطع ہوتی ہے۔

یہ اس جملہ میں تحویل ہو جاتا ہے  $\text{لا فلا فرما} =$  جس کے یہ معنی ہیں

کہ سطحی تراشش کا مرکز ثقل دما پر واقع ہونا چاہیے جیسا کہ دفعہ ۵۲ میں ثابت کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ یہ شرط پوری ہوتی ہے۔ ابتدائی محل میں مرکز ثقل  $\text{ث}$  اور اچھال کا مرکز  $\text{ھ}$  ایک ہی انتظامی خط میں واقع ہوتے ہیں اور اچھال کے مرکز کے محدودوں کو ہم  $(\text{لا، ما، ہی})$  سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ  $\text{ث}$  کے لئے  $(\text{لا، ما})$  وہی ہیں۔ ہٹائے ہوئے محل میں اچھال کا مرکز مقام  $\text{ھ}$  پر چلا جاتا ہے اور فرض کرو کہ  $\text{ھ}$  کے محدود ابتدائی محوروں کے حوالے سے  $(\text{لا، ما، ہی})$  ہیں۔

اب  $\text{ح لا} = \text{لا لا ی فرلا فرما}$ ،  $\text{ح ما} = \text{لا ما ی فرلا فرما}$ ،

$\text{ح ہی} = \text{لا ہی ی فرلا فرما}$

جہاں عنصری ستون  $\text{ن ق}$  کے حجم کو  $\text{ی}$  فرلا فرما لیکر اس کے مرکز ثقل کو اسکے طول کے وسطی نقطہ پر لیا گیا ہے اور یہ مکمل اس بنا پر ٹکے گئے ہیں۔

ہٹائے ہوئے محل میں متناظر عنصری ستون  $\text{ن ق}$  ہو گا جس کا طول  $\text{ی} + \text{لاط}$  ہے۔ اس کا مرکز ثقل  $\text{ث}$  سے  $\frac{1}{2} (\text{ی} + \text{لاط})$  فاصلہ پر واقع ہے اور اس لئے  $\text{ن}$  سے  $\frac{1}{2} (\text{ی} - \text{لاط})$  فاصلہ پر۔ اسلئے

$\text{ح لا} = \text{لا لا (ی + لاط)}$ ،  $\text{فرلا فرما ح ما} = \text{لا ما (ی + لاط)}$ ،  $\text{فرلا فرما}$

$\text{ح ہی} = \text{لا ہی (ی - لاط)}$ ،  $\text{فرلا فرما}$

ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے زاویہ  $\text{ط}$  کی پہلی قوت تک  $\text{ح ہی} = \text{ح لا}$  اور اس لئے اچھال کی سطح کا ماسی مستوی، تیراؤ کے مستوی کے متوازی ہے جیسا کہ دفعہ ۵۲

میں ثابت کیا گیا تھا۔

اب ہٹائے ہوئے محل میں جسم پر مساوی مگر متقابل دو متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں یعنی ایک تو اس کا وزن  $W$  اور دوسری اچھال کی قوت جو نقطہ  $C$  سے انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے اور دوسری اچھال کی قوت جو نقطہ  $H$  میں سے انتصاباً اوپر وار عمل کرتی ہے۔ یہ قوتیں ایک جفت بناتی ہیں۔ اس جفت کا مستوی گردش کے محور پر علی التوائم ہو گا صرف اُس صورت میں جبکہ نقاط  $C$  اور  $H$  ایک ایسے انتصابی مستوی میں واقع ہوں جو واپر عمود وار ہے۔ یعنی اگر  $MA = MB$

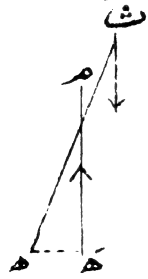
یا  $(MA + MB) = 0$  فرلا فرما۔

یا  $(MA - MB) = 0$  فرلا فرما۔ میں تخیل ہو جاتا ہے جس کے

یعنی ہیں کہ گردش کا محور و  $MA$  جسم کی آس تراش کا جمود کا صدی محور ہونا چاہیے جو تیراؤ کے مستوی سے قطع ہوتی ہے۔

جب یہ شرط پوری ہو تو  $H$  میں سے گزرنے والا انتصابی، خط  $CH$  کو ایک نقطہ  $C$  پر قطع کرے گا جسکو ہم مرکزنا بعد یا پس مرکز کہیں گے۔

جسم پر عمل کرنے والا جفت  $W$  اور  $H$  ہے



جو جسم کو اپنے اصلی محل پر لیجانے کا میلان رکھتا ہے اگر  $M$ ،  $T$  کے اوپر واقع ہو یا یہ اصلی ہٹاؤ کو بڑھانے کا میلان رکھتا ہے اگر  $M$ ،  $T$  کے نیچے واقع ہو۔ نیز حاصل ہوتا ہے  $H = M \times T$

$$= \text{ھ} \text{ھ} = \text{لا} - \text{لا}$$

$$= \frac{\text{ط کر لا}^2 \text{فر لا فر لا}}{\text{ح}}$$

اسلئے ھ ھ =  $\frac{\text{ا م ر ج}}{\text{ح}}$  جہاں ا م ر ج گردش کے محور کے گرد جسم کی اوس تراش کا جہود کا معیار ہے جو تیراؤ کے مستوی سے قطع ہوتی ہے۔  
اس لئے جسم کو اپنے اصلی تفل کی طرف نیچا لے کا میدان رکھنے والا جنت یعنی استر وادی جنت ہے

$$\text{ج شاح (ھ ھ - ھ ھ) = ج ث (ا م ر ج - ھ ھ)}$$

۶۷۔ اب چونکہ جسم کی سطحی تراش کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے صدی محور دو ہوتے ہیں جن کے جواب میں جہود کے معیار ج م ر ج ہونگے، اس لئے ان میں سے ہر محور کے گرد کا گھماؤ ہٹاؤ کے مستوی میں ایک جنت پیدا کرے گا جو جسم کو متوازن کرنے کا میدان رکھے گا اگر ھ ھ شاح >  $\frac{\text{ا م ر ج}}{\text{ح}}$  اور تیر >  $\frac{\text{ا م ر ج}}{\text{ح}}$  پس یہ شرطیں توازن کی قائمیت کے لئے ضروری ہیں۔

۶۸۔ کام ہو ہٹاؤ پیدا کرنے میں کیا جاتا ہے۔ جب جسم کو ایک چھوٹے زاویہ ط میں سطحی تراش کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک صدی محور گرد پھرایا جائے تو جسم پر عمل کرنے والا جنت ہو گا

$$\text{ج ث (ا م ر ج - ھ ھ) ط}$$

اس لئے ط میں ایک چھوٹی مقدار فرطہ کا اضافہ پیدا کرنے کے لئے سیر فی مائل

جو کام کرے گا وہ = ج ث (ا م ر ج - ھ ھ) ط فرطہ  
مکمل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ زاویہ ہٹاؤ ط کے پیدا کرنے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ  
=  $\frac{1}{4} \text{ج ث (ا م ر ج - ھ ھ) ط}$

۶۹۔ قائمیت کے شرائط کا کافی ہونا۔ تیراؤ کے مستوی میں، کسی ایسے محور کے گرد جو پانی تراش یا فاصل آب کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اگر چھوٹا گھماؤ یا گردش طہ لی جائے تو یہ گردش دو گردشوں طہ، طہ کا مرکب خیال کی جاسکتی ہے جنہیں بالترتیب فاصل آب کے مدد سی محوروں کے گرد لیا جائے۔ ان میں سے ہر گردش علیحدہ طور پر ایک استروادی جفت پیدا کرتی ہے اور اس لئے ہٹاؤ کے پیدا کرنے میں بیرونی عامل کا کل کام یا توانائی بالقوہ میں اضافہ ہوگا

$\frac{1}{2} ج ث (ج-ح \times ھ ث) طہ + \frac{1}{2} ج ث (ج-ح \times ھ ث) طہ$   
جس سے نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کہ شرائط ھ ث >  $\frac{1}{2} ج ث$  اور نیز >  $\frac{1}{2} ج ث$  ایسے ہٹاؤں کے لئے قائمیت کی کافی شرطیں ہیں جن سے ہٹائے ہوئے مانع کے حجم میں تغیر واقع نہیں ہوتا۔

۷۰۔ قائمیت کے مسئلہ پر بحث کسی قدر مختلف پیرایہ میں ہو سکتی ہے۔ مرکز البعد یا پس مرکز کی یہ تعریف کہ وہ خط ھ ث اور ایک خفیف ہٹاؤ کے بعد اچھال کے نئے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط کا نقطہ تقاطع ہے ہمیں مسئلہ ذیل کی طرف مبہری کرتی ہے۔

پس مرکز اچھال کے منحنی کے اس نقطہ پر کہ مرکز انحناء جہاں پر ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط اس منحنی سے ملتا ہے۔

یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ نقطہ ہر منحنی کے متصلہ عموں کا نقطہ تقاطع ہے۔ پس اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی ہٹاؤ کے لئے بشہ طیکہ ہٹایا ہوا حجم ذہبی رہے، سیالی دباؤ کی سمت ہمیشہ اچھال کے منحنی کے برہیمہ کا انتصابی

۱۔ اس قسم کے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کے بعد میں طہ، طہ والی رقم شامل نہیں ہوتی۔ اس کو دفعہ آئینہ ہما کی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے۔



۷۲۔ گزشتہ دفعہ میں یہ بات فرض کر لی گئی ہے کہ سیالی دباؤ کے عمل کا انتصابی خط ایک خفیف ہٹاؤ کے بعد ھ ڈش کو قطع کرتا ہے۔ یہ صرف اس وقت درست ہوگا جبکہ ہٹاؤ کی سطح مستوی نقطہ ھ پر اچھال کی سطح کی صدری تراشیں ہو۔ جب یہ صورت نہ ہو تو ہٹاؤ کے انتصابی مستوی پر خط عمل کا ظل ھ ڈش کو نقطہ ھ پر قطع کرے گا جو سطح کی عمادی تراشیں کا مرکز انخا ہوگا۔

اس لئے نقطہ ھ پر اچھال کی سطح کی کسی عمادی تراش کے انخا کا نصف قطر  $\frac{1}{2}$  ہوگا اور اگر تیراؤ کے مستوی کے جود کے صدری معیار اس کے مرکز ہندسی پر  $\frac{1}{2}$  ہوگا تو اچھال کی سطح کے انخا کے صدری نصف قطر ھ پر

$$\frac{\text{م}}{\text{ح}} \text{ اور } \frac{\text{م}}{\text{ح}}$$

ہونگے اور اس کی صدری تراشیں تیراؤ کے مستوی کے صدری محوروں کے متوازی ہونگی۔

۷۳۔ قدرتا ایک نہایت اہم صورت پیش ہوتی ہے۔ یعنی ایک جہاز کے توازن کی قامت کا سوال جبکہ رولنگنے (Rolling) کی وجہ سے اس کے محل میں ہٹاؤ پیدا ہو۔

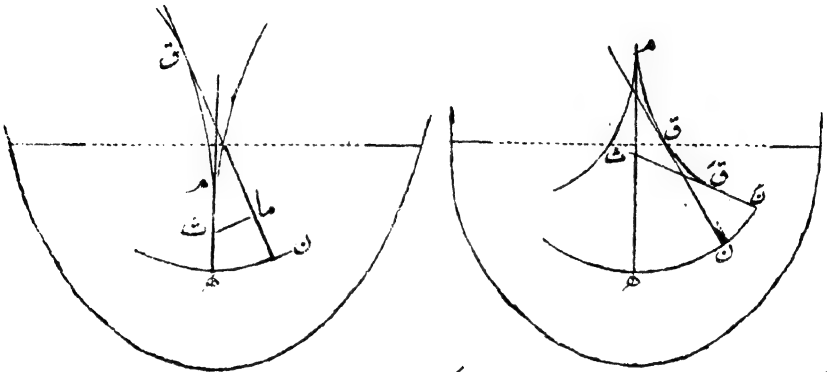
عام طور پر جہاز کے لئے اچھلنے (Tossing) کے بغیر رولنگنا ممکن نہیں ہے کیونکہ جہاز کے دروں سرے غیر متشاکل ہوتے ہیں۔ لیکن ایک بہت لمبے جہاز کی صورت میں جیسے کہ عام طور پر بحر اوقیانوس (Atlantic Ocean) میں چلنے والے جہاز ہوتے ہیں یہ مان لیا جاسکتا ہے کہ جہاز ایک مستوی سے جو اس کے

طول پر عمود دار ہو متشاکلا تقسیم ہو سکتا ہے۔ اس صورت میں جہاز میں متشاکل کے دو انتصابی مستوی ہونگے۔ اور اس لئے انتصابی خط ھ ڈش تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے گزرے گا۔

غیر خطا ھ ڈش اچھال کے سطح کو متشاکلا تقسیم کرتا ہے اور نقطہ ھ اعظم



یا اقل انحناء کا نقطہ ہے۔ ان میں سے پہلی صورت میں برہمچہ کا قرن نیچے کی طرف



نکھیلے اور دوسری صورت میں اوپر کی طرف نکھیلے ہے۔

شکلوں سے ہٹاؤ کے اثرات فوراً ظاہر ہو جاتے ہیں۔

پہلی صورت میں تقویمی معیار (Righting moment) جو ہٹاؤ کے دئے ہوئے زاویہ کے لئے ثابتیت کا سکونیاتی ناپ ہے ث م کے متناسب ہے جو نقطہ ث سے ماس ن ق بدعمود ہے اور ہٹاؤ کے زاویہ کے بڑھنے سے بڑھتا ہے۔

دوسری صورت میں تقویمی معیار اعظم ثابتیت اختیار کرتا ہے اور پھر گھٹتا ہے اور اس محل بعد دم ہو جاتا ہے جو ماس ث ق ن سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ توازن کا ایک محل ہے لیکن ایسے توازن کا جو غیر قائم ہے کیونکہ عام جیلی قانون کے مطابق قائم اور غیر قائم توازن کے محل باری باری سے یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتے ہیں۔

اگر ث کو مبدأ مان کر اچھال کے معنی کی مساوات  $ع = ث (نہ)$  حاصل کی جائے تو

$$ث م = \frac{فرع}{فرقہ}$$

اور تقویمی معیار ہو گا  $\frac{فرع}{فرقہ}$

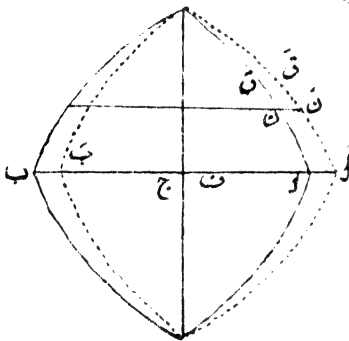
جہاں وہ جہاز کا وزن ہے۔  
عام طور پر معمولی ہٹاؤں کے لئے اچھال کا منحنی تقریباً زاغہ کی ایک  
توس ہو گا۔ دیوار پہلو جہاز کی صورت میں یعنی ایسے جہاز کی صورت میں جسکے  
پہلو خط آب کے نزدیک انتصابی ہوں اچھال کا منحنی مکافہ کی توس  
ہوتا ہے۔

جہاز کی صورت میں اگر رڈ ٹکٹے کے لئے مرکز مابعد ہر ہو تو حاصل ضرب  
وہ کثرت کو جہاز کا استحکام (Stiffness) کہتے ہیں۔

۳۔ ڈیوین کا مسئلہ۔ سیدھا تیرنے والے جہاز کی صورت میں تیراؤ کی  
سطح کی عرضی تراش کے انحناء کا نصف قطر ہو گا

$$r = \frac{I}{A \cdot e}$$

جہاں فاصلہ آب کے گھیرے کا عنصر فرس ہے، اس کا رقبہ ہے  
اور جہاز کے پہلو کا انتصابی سمت کے ساتھ میلان عم ہے۔ اور محاور لا اور ما  
جہاز کی اس تراش کے طولی اور عرضی محور ہیں جو تیراؤ کے ستوی سے قطع  
ہوتی ہے اور یہ محور اس ستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے گزرتے ہیں۔  
اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو



کہ تیراؤ کی سطح کی عرضی تراش پر ج، ج  
و متصل نقطے ہیں اور ج کا ماسی ستوی  
فاصل آب ان ق ب کے ساتھ  
چھوٹا زاویہ طہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ اس  
ماسی ستوی سے جہاز کی جو تراش حاصل  
ہوتی ہے اس کا ظل فاصل آب پر  
ن ق ب ہے، اس طرح ج کا

ظل ف رقبہ ن ق ب کا مرکز ہندسی ہے۔ فرض کرو کہ متناظر عنصر  
ن ق ن ق ہیں اور ناق = فرس تو

رقبہ  $ن ق ن ق =$  ماط مس ع فرس

$\therefore$  ج ف  $\times$  (ل) = کر ا ماط مس ع فرس

اور چونکہ ج ج = ر ط اور انتہا میں ج ف = ج ج اس لئے

ر ط = کر ا ماط مس ع فرس

اس جگہ کو سب سے پہلے سی ڈیوپن (C. Dupin) نے اپنے

ایک مقالہ میں سائنس کی اکادمی (Academie der sciences) کو  
تعارف میں پیش کیا۔ طولی تراشش کے انحناء کے نصف قطر (مہا) کے لئے  
بھی ایک متناظر جملہ صریحاً موجود ہے۔

۵۷۔ لیکٹر کا مسئلہ۔ اگر عرضی اور طولی ہٹاؤں کے لئے پس مرکزی  
بندیوں کو یعنی اجمال کی سطح کی عرضی اور طولی تراشوں کے انحناء کے نصف قطروں  
کو ر اور س سے متبصر کیا جائے تو ہم جانتے ہیں کہ

$$ر = \frac{ج}{ح} \text{ اور } س = \frac{ج}{ح}$$

جہاں ج اور ح فاصل آب کے جمود کے حدی میسار ہیں۔ لیکٹر  
نے ان مقداروں میں حسب ذیل روابط قائم کئے

$$ر = \frac{فرج}{فرح} + ر = \frac{ح فر}{فرح} ، س = \frac{فرج}{فرح} = س + ح = \frac{فرج}{فرح}$$

لیکٹر کے اس مضمون کا ترجمہ مسٹر میری فیالڈ (Merrifield)

نے (The proceedings of the Institute of Naval Architects)

میں اور مارتچ ۱۸۷۸ء کے (Messenger of Mathematics)

میں دیا ہے جو دو ثبوت وہاں دئے گئے ہیں ان میں سے پہلا حسب ذیل ہے۔ تاریخی  
دیکھنی کی خاطر اسکو یہاں بیان کیا جاتا ہے آئندہ دفعہ ۸۰ میں اس کا زیادہ باطن  
ثبوت دیا جائیگا۔



اب اگر ہمارے کے لئے محل  $h$  اور  $m$  ہوں تو

$$m = h = h - h + h + h$$

$$= m + h$$

$$\text{لیکن } h \times m = m \times h$$

$$m = h = m + h = h + m = h + m$$

جہاں  $m$  سے  $h$  تبدیل ہوتا ہے جو تیراؤ کی سطح کا نصف قطر انتخاب ہے۔

$$m = h = h - m + m = h - m + m$$

$$= h - m$$

پس معلوم ہوا کہ پس مرکز بلحاظ جہاز کے اوپر اٹھتا ہے اگر یہ تیراؤ کی سطح کے مرکز انحناء کے نیچے واقع ہو اور نیچے بیٹھتا ہے اگر یہ مرکز انحناء کے اوپر واقع ہو۔  
۷۷۔ بیچ بانی جہاز (Screw-steamer) کا اپنے بیچ کے عمل کی

وجہ سے جھک جانا (Heeling over) -

(یونیورسٹی پروفیسر گرین ہل (Prof. Greenhill) سے منسوب ہے)

(۷۷) اگر انجن کو پھرانے والا جفت فٹ پونڈوں میں  $l$  ہو اور فی گردشوں کی تعداد  $n$  تو ایک منٹ میں جو کام ہوتا ہے وہ  $2\pi n l$  ہو گا۔ لیکن اگر انجن طبعی طاقت سے کام کر رہا ہو تو

$$\text{کام} = 2\pi n l$$

$$2\pi n l = 2\pi n l$$

اگر  $h$  وہ زاویہ ہو جس میں سے جہاز جھک جاتا ہے اور مرکز ثقل کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع  $f$  ہو اور جہاز کا وزن ٹنوں میں  $w$  ہو تو

$$l = 2\pi n w$$

$$2\pi n w = 2\pi n w$$

اس مسادات سے طہ ملتا ہے۔  
 جھکنے کے اثر کو وسطیٰ مستوی سے ج فاصلہ پر ایک ایسا وزن ورکھنے سے  
 زائل کر دیا جاسکتا ہے کہ

$$و \times ج = ل$$

$$یا \pi \pi ن ج د = ۳۳ ط$$

پنکبانی جہاز کی صورت میں جھکاؤ طویٰ سمت میں ہوگا اور اس صورت  
 میں ف طویٰ، پس مرکوزی ارتفاع ہوگا۔  
 یہ قابلِ توجہ ہے کہ جبک جانے کی سمت گردش کے سمت کے مخالف  
 ہوتی ہے۔ مثلاً پنکبانی جہاز کی صورت میں جو آگے کو جارہا ہے سامنے کا حصہ  
 خفیف سا اٹھا ہوا ہوگا اور پیچھے کا خفیف ڈوبا ہوا۔

## اچھال کی سطح بالعموم۔

— ۷۸

فرض کرو کہ ابتدائی آب خط تراشش کے مرکز ہندسی میں سے گزرنے  
 والے انتصابی خط میں مبدایا گیا ہے۔ اگر ابتدائی تراشش ہی = ج ہو تو  
 خفیف طور پر ہٹائے ہوئے محل میں اس مستوی کی مسادات ہوگی  
 ی = ج + ل + لا + م  
 جہاں ل م چھوٹے ہیں۔

اگر ان دو محلوں میں (لا، با، ی) اور (لا، ما، ی) اچھال کے مرکبوں  
 کے محدود کو تعبیر کریں تو

$$ح (لا - لا) = کر (ی - ج) لا فلا فرما = ل + ف + م$$

$$ح (ما - با) = کر (ی - ج) ما فلا فرما = ف + ل + ب + م$$

$$ح (ی - ی) = کر (ی - ج) لا فلا فرما = ل + ل + ف + ل + م + ب + م$$

$$جہاں ل = کر لا فلا فرما، ف = کر لا فلا فرما، ب = کر ما فلا فرما$$

اس لئے  $۲(ی-ی) = ل(لا-لا) + م(ما-ما)$

یا  $۲(ی-ی) = \frac{ح}{و ب-ب} \{ ب(لا-لا) - ۲ف(لا-لا) \} (ما-ما)$

جو اچھال کی سطح کی تقریبی شکل ہے۔ اگر ابتدائی محور لا اور ماسٹوی تراش کے صدری محور ہوں تو  $f = ۰$  اور اگر مبدأ کو اچھال کے مرکز پر پہلے مقام منتقل کیا جائے تو سطح کی مساوات ہو جائیگی

$$۲ی = \frac{ح}{و} \frac{لا}{ب} + \frac{ح}{و} \frac{ما}{ب}$$

اب اگر ہم پس مرکوزوں کی تعریف اس طرح کریں کہ وہ اچھال کی سطح کی صدری عمادی تراشوں کے مراکز اعتنائیں تو اچھال کے مرکز کے اوپر پس مرکوزوں کے ارتفاع صدری نصف قطر انخا  $\frac{۱}{۲}ح$  یا  $\frac{۱}{۲}ب$  ہونگے۔

۷۹۔ قائمیت کی مشدہ۔

اچھال کی سطح کے نقطہ (لا، ما، ی) پر ماسی مستوی ہے

$$طا-ی = \frac{ح}{و} (ضما-لا) + \frac{ح}{و} (عما-ما)$$

اور اس مستوی سے مجسم کے مرکز نقل (ب، ۰، ۰) کا عمودی فاصلہ ہوگا

$$\left\{ \frac{ح}{و} \frac{لا}{ب} + \frac{ح}{و} \frac{ما}{ب} + ۱ \right\} \left\{ \frac{ح}{و} \frac{لا}{ب} + \frac{ح}{و} \frac{ما}{ب} - \frac{۱}{۲} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{ح}{و} \frac{لا}{ب} + \frac{ح}{و} \frac{ما}{ب} + ۱ \right\} \left\{ \frac{ح}{و} \frac{لا}{ب} - \frac{ح}{و} \frac{ما}{ب} - ۱ \right\}$$

$$= \frac{ح}{و} \frac{لا}{ب} (۱ - \frac{ح}{و}) + \frac{ح}{و} \frac{ما}{ب} (۱ - \frac{ح}{و})$$

اب دفعہ ۵۵ کی رو سے توازن کے محل ایک ایسے وزنی جسم کے توازن کے محل دریافت کرنے کے معاملہ میں جو اچھال کی سطح سے محیط ہو اور ایک افقی مستوی پر لٹکا ہوا ہو۔ پس قائمیت کے لئے اس مستوی سے مرکز ثقل کا ارتفاع اقل ہونا چاہیئے۔ اس کے لئے ضروری ہے کہ  $\frac{1}{2}H$  اور  $\frac{1}{2}H$  سے جی چھوٹا ہو یا مرکز ثقل دونوں پس مرکزوں کے نیچے واقع ہو۔

تیراؤ کی سطح - لیکٹرٹ کا مسئلہ۔

فرنس کر دو کہ ٹھوس دفعہ ۸ کے بموجب دوسرے محل میں ہے اور اسکو دبانے سے غرق شدہ حجم میں ایک جھوٹی مقدار مفع ح کا اضافہ ہوتا ہے۔ اگر حجم مفع ح کی چپکستی کے مرکز ثقل کے محدد ضما، عا، طا ہوں تو ضما مفع ح = (ح + مفع ح) (لا - لا + مفع لا - مفع لا)

$$= \text{ل مفع} + \text{م مفع} + \text{دفعہ ۸}$$

اسی طرح عا مفع ح = ل مفع + م مفع ب

$$\text{اور طا مفع ح} = \frac{1}{2} (\text{ل مفع} + \text{ل م مفع} + \text{م مفع} + \text{م مفع ب})$$

نیز جیسے چپکتی کی موٹائی کم کر دی جاتی ہے نقطہ (ضما، عا، طا) تیراؤ کی سطح کے متناظر نقطہ پر منطبق ہونے کی طرف مائل ہوتا ہے یعنی آب خط رقبہ کے مرکز ہندسی پر۔

اس لئے تیراؤ کی سطح پر ردابط حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لا} \times \text{فرح} = \text{ل فر ا} + \text{م فر ف}$$

$$\text{ما} \times \text{فرح} = \text{ل فر ف} + \text{م فر ب}$$

$$\text{جی} \times \text{فرح} = \frac{1}{2} (\text{ل فر ا} + \text{ل م فر ف} + \text{م فر ب})$$

اور تیراؤ کی سطح کی مساوات ہوگی



$$۲ = \frac{\text{فرج}}{\text{فرج} - (\text{فرج})} \left\{ \begin{array}{l} \text{فرج} - ۲ \text{ لا} \text{ فرج} + \text{لا} \text{ فرج} \end{array} \right\}$$

خاص صورت میں جبکہ فرج = ۰ تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$۲ = \frac{\text{لا}}{\text{فرج}} + \frac{\text{فرج}}{\text{لا}}$$

اور تیراؤ کی سطح کے نصف قطر انما ہیں  $\frac{\text{فرج}}{\text{فرج}}$  اور  $\frac{\text{فرج}}{\text{فرج}}$  جیسا دفعہ ۵ میں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ٹھوس کی دو متوازی تراشوں کے صدی محوروں کا متوازی

ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس طرح اگر  $\text{فرج} = ۰$  تو اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ

$$\frac{\text{فرج}}{\text{فرج}} = ۰$$

اس طرح دفعہ ۵ کے نتائج صرف ان صورتوں میں ہی درست ہونگے

جن کو اس دفعہ میں مان لیا گیا ہے یعنی تشاکل کے انتصابی مستوی موجود ہیں

جن میں افقی تراشوں کے تمام صدی محور واقع ہوتے ہیں۔

۸۱۔ پس مرکز کا مقام معلوم کرنے کی چند مثالیں درج کی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ نصف قطر اور طول ف کا ایک ٹھوس اسطوانہ انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔

اس صورت میں تیراؤ کا مستوی ایک دائری رقبہ ہے اور

$$\text{اس} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{2} \text{ لا} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{2} \text{ لا} \right)^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{2} \text{ لا} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{2} \text{ لا} \right)^2$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

۱۔ لیکچر کے مسئلہ کی تصحیح اور گزشتہ چند دفعات کا طرز استدلال اور دفعات آئندہ ۹۰، ۹۱، ۹۲

۱۰، ۱۱، ۱۲ ڈاکٹر برام ویج (Dr. Bromwich) کے من فکرہ نتیجہ ہیں۔

اس لئے اگر محور کا طول  $\phi$  غرق ہو تو

$$\pi \phi^2 \times \text{ہم} = \frac{\pi \phi^2}{4} \times \text{ہم} \quad \text{یا} \quad \text{ہم} = \frac{\phi^2}{4}$$

اور توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{\phi^2}{4} < \frac{\phi^2}{4} - \frac{\phi^2}{4}$$

مثال ۲ — ایک دائری اسطوانہ تیرا ہے اسطور پر کہ اس کا محور افقی اور سیال کی سطح میں ہے۔ اس کو اس کے محور میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں ہٹا دیا گیا ہے۔

تیراؤ کا مستوی ایک مستطیل ہے اور

$$\phi^2 = \frac{1}{4} \phi^2$$

جہاں  $\phi$  اسطوانہ کا طول اور  $\frac{1}{4}$  نصف قطر ہے

$$\therefore \text{ہم} = \frac{1}{4} \times \frac{\phi^2}{4}$$

اور توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{1}{4} \times \frac{\phi^2}{4} < \frac{\phi^2}{4}$$

$$\phi^2 < \frac{1}{4}$$

مثال ۳ — ایک ٹھوس مخروط انتصابی محور اور نیچے دار اس کے ساتھ

تیرا ہے۔

فرض کرو کہ  $\phi$  محور کا طول ہے،

ی محور کا وہ حصہ جو غرق ہے،

۲ مخروط کا زاویہ اس ہے اور

$$\text{تو} \quad \phi^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \phi^2$$

اور  $ح = \frac{۱}{۲} ی^۲ مس^۲ ع$

۲ھم  $= \frac{۳}{۲} ی مس^۲ ع$

۳ھم  $= \frac{۳}{۲} ف - \frac{۳}{۲} ی$

اور اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$ی مس^۲ ع < یا > ف - ی$

لیکن اگر  $ث$  اور  $ش$  سیال اور مخروط کی کثافتیں ہوں تو

$$\frac{ث}{ش} = \left( \frac{ی}{ف} \right)^۲$$

اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{ث}{ش} < یا > (جم^۲ ع)$$

مثال ۴۔ ایک متساوی الوجہین مثلثی منشور تیر رہا ہے اس طور پر کہ

اس کا قاعدہ غرق نہیں ہے اور اس کے کنارے افقی ہیں۔

اول توازن کے اس محل پر غور کرو جس میں منشور کا قاعدہ افقی سے

مائل ہو دیکھو دنتہ (۲۹)۔

اس صورت میں اگر  $ا ق = ۲ م$ ، اور  $ا ن = ۲ لا$  اور اگر صفحہ (۸۰) کی

مساوات (ب) میں ہم  $ا = ب$  رکھیں تو  $لا$  اور  $م$  مساواتوں

$$لا + م = ۲$$

$$لا = م$$

سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

اب اور  $ا ج$  کو حوالے کے محاور قرار دینے سے  $ث$  اور  $ھ$  کے محدود

علیٰ الترتیب ہونگے



اس لئے  $ھم = \frac{۴}{۳} م$  جب  $\frac{۲}{۳}$  اور  $ھٹ = \frac{۴}{۳} (۱-۴)$  جم  $\frac{۲}{۳}$

اور  $ھم < ھٹ$  اگر جم  $\frac{۲}{۳} > \frac{۴}{۳}$

اب دفعہ (۴۹) میں جس کا حوالہ پہلے دیا جا چکا ہے ہم نے ثابت کیا ہے کہ توازن کے یا تو تین محل ہونگے یا صرف ایک بموجب اس کے کہ

$$جم \frac{۲}{۳} < ۱ > \frac{۴}{۳}$$

اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب توازن کے تین محل ہوں تو درمیانی محل جس میں ج ب افقی ہے غیر قائم توازن کا محل ہوگا۔ اور دوسرے دونوں محلوں میں توازن قائم ہوگا۔

اگر توازن کا صرف ایک محل ہو تو توازن قائم ہوگا۔

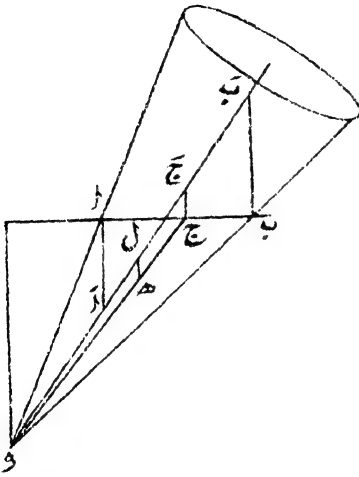
طالب علم کے لئے یہ اچھی مشق ہوگی اگر وہ ان نتائج کو اچھال کے منحنی کی مساوات معلوم کر کے اس کے مرکز انحنا کا مقام دریافت کرنے سے حاصل کرے۔

۸۲۔ محدود ہٹاؤ۔ اگر ایک ٹھوس جسم پانی میں تیر رہا ہو اور اس کو توازن کے محل سے ہٹا کر ایک دئے ہوئے زاوے میں گھمایا جائے تو پہلے کی طرح سیالی دباؤ کا معیار استرداد ہی ہوگا یا غیر استرداد ہی بموجب اس کے کہ نقطہ  $L$  جس پر اچھال کے نئے مرکز میں سے گزرنے والا انتصابی خط، خط ھٹ کو قطع کرتا ہے  $L$  کے اوپر یا نیچے واقع ہو۔

اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ اگر  $L$ ،  $L$  کے اوپر واقع ہو تو جسم کو آزاد کر دینے سے وہ اپنے اصلی محل کی طرف لوٹ آئیگا اور اس میں سے بہتر تراز کر بیگا یا یہ کہ قانینیت کی ہمارے سابق تعریف کے بموجب اصلی محل قائم توازن کا محل ہوگا۔ علم محل کا ایک عام قانون یہ ہے کہ قائم اور غیر قائم توازن کے محل یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتے ہیں اور ممکن ہے کہ جسم اپنے اصلی محل سے اس ہٹاؤ میں توازن کے محلوں میں سے گزر چکا ہو۔

مثلاً ایک خاص مثال حسب ذیل ہے۔

ایک ٹھوس مخروط اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور اس



نیچے دار سے اس کو ایک انتصابی مستوی میں  
زاویہ ط میں لٹھایا گیا ہے۔ ہٹا سے پوئے  
سیال کا حجم وہی رہتا ہے۔ سیالی و باو  
کے معیار کی سمت معلوم کرنا مطلوب ہے۔  
فرض کرو کہ سیال کی مستوی سطح  
سے حاصل شدہ مخروطی تراش کا محور اعظم  
ا ب ہے اور اس کا وسطی نقطہ ج ہے،  
خطوط ا ا، ب ب، ج ج خط ا ب  
پر عمود قائم ہیں اور زاویہ ل و د ب = ۲۰  
اور و ا = ۱۱  
و ا = ط = ع

اور و ب ب = ۲۱ - ط = ع

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} (و ا + و ب) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{ج ب (ط - ع)}{ج ب ط} + \frac{ج ب (ط + ع)}{ج ب ط} \right\}$$

$$= \frac{د ج ب ط}{ج ب (ط + ع)}$$

$$\therefore و ل = \frac{۳}{۴} د ج ب ط$$

قطع ناقص ا ب کا نصف محور اصغر ا ن عمودوں کے درمیان وسط تناسب ہے  
جو مخروط کے محور پر ا اور ب سے کھینچے جائیں۔

$$\therefore \text{نقص کا رقبہ} = \frac{1}{3} ا ب (و ا \times و ب \times ج ب^۲ ع)$$

$$= \frac{۲}{۳} \left\{ \frac{ج ب ع ج ب^۲ ع}{ج ب (ط + ع)} + \frac{ج ب (ط - ع)}{ج ب ط} \right\}$$

اس لئے ہٹائے ہوئے سیال کا حجم  

$$= \frac{1}{2} \text{ حجم } (ط - ع) \text{ (ناقص کا رقبہ)}$$

$$= \frac{1}{2} \pi \times \text{جب } 2 \text{ حجم } ع \left\{ \frac{\text{حجم } (ط - ع)}{\text{حجم } (ط + ع)} \right\}$$

(۸۳) اب اگر سیال اور مخروط کی کثافتیں  $\rho$  و  $\rho'$  ہوں تو چونکہ ہٹائے ہوئے سیال کا وزن مخروط کے وزن کے مساوی ہے اس لئے

$$\rho \times \text{ث } 2 \text{ جب } 2 \text{ حجم } ع \left\{ \frac{\text{حجم } (ط - ع)}{\text{حجم } (ط + ع)} \right\} = \rho' \times \text{ث } 1 \text{ مخروط کا ارتفاع ہے}$$

$$\text{یا } \left( \frac{\rho}{\rho'} \right) = \frac{\text{ث } 1}{\text{ث } 2} = \frac{\text{حجم } (ط - ع)}{\text{حجم } (ط + ع)} \times \frac{1}{\text{حجم } ع}$$

$$\text{اور } \left( \frac{\rho}{\rho'} \right) < \frac{\text{حجم } (ط - ع)}{\text{حجم } (ط + ع)} \times \frac{1}{\text{حجم } ع}$$

$$\text{یا اگر } \left( \frac{\rho}{\rho'} \right) > \frac{\text{حجم } (ط - ع)}{\text{حجم } (ط + ع)} \times \frac{1}{\text{حجم } ع}$$

طہ کو لا انتہا چھوٹا فرض کرنے سے صغیر ہٹاؤ کے لئے ہمیں قائمیت کی شرط ملے گی

$$\left( \frac{\rho}{\rho'} \right) < \frac{\text{حجم } (ط - ع)}{\text{حجم } (ط + ع)} \times \frac{1}{\text{حجم } ع}$$

جو دفعہ (۸۱) کی مثال ۳ کے مطابق ہے۔

فرض کر دو کہ مخروط کا توازن تعدیلی ہے یعنی فرض کر دو کہ

$$\text{ث } 2 = \text{ث } 1$$

تو محدود ہٹاؤ کے بعد سیال کا عمل مخروط کو اپنے اصلی محل کی طرف لیجانے پر مائل ہو گا

اگر

جم عم جم ط < ۸. جم (ط + ع) جم (ط - ع)

یہ ایک ایسی مشرط ہے جو ہمیشہ صادق آتی ہے کیونکہ ع اور ط میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے۔

اس لئے محزوط کے تعدیلی توازن کی صورت میں کسی محدود ہٹاؤ کے لئے توازن کو قائم کہا جاسکتا ہے۔

۸۔ جب مانع ایک برتن میں ہو جسکو اپنے اصلی محل سے ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے تو گذشتہ تحقیقات کی مدد سے ہم حاصل کیجے وارد ہاؤ کے خط عمل کا تعین کر سکتے ہیں درحقیقت اس صورت میں پچھلی صورت کی طرح یہ مسئلہ حسب ذیل ہے۔

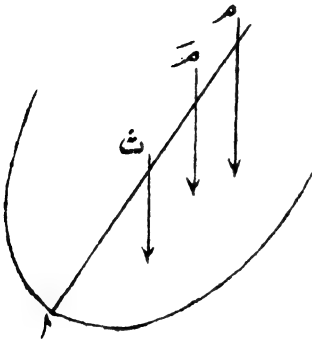
ایک ٹھوس جسم ا ب ج سے ایک دیا ہوا حجم ایک مستوی کے ذریعہ تراش لیا گیا ہے اس حجم کا مرکز ہندسی ہ ہے اور خط ج ہ اس مستوی پر عمود وار ہے۔ اگر وہی حجم ایک ایسے مستوی سے تراشا جائے جو مستوی ا ب سے بہت چھوٹا زاویہ بناتا ہے تو اس خط مستقیم کا محل معلوم کرنا مطلوب ہے جو دوسرے مستوی پر عمود وار ہے اور اس سے جو حجم کٹتا ہے اس کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے۔

اگر برتن کی اندرونی سطح ایسے مستوی کے لحاظ سے متشکل ہو جو ہ میں سے گزرتا ہے اور تراش کے دونوں مستویوں کے خط تقاطع پر عمود وار ہے تو وہ خط جسکا محل دریافت کرنا مطلوب ہے ج ہ کو مرکز مابعد ہ پر قطع کرے گا جس کا مقام ہارے گذشتہ نتائج سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۸۴)

۸۴۔ برتن جس میں مانع ہو۔ ایک کھوکھلا برتن جس میں مانع ہے مانع میں تیر رہا ہے۔ توازن کی نوعیت معلوم کرنا مطلوب ہے یہ فرض کر کے کہ جسم کی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ہٹاؤ کے انتصابی مستوی کے لحاظ سے جسم متشکل ہے اور یہ کہ جسم اور مانع کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی خط میں ہیں۔





فرض کرو کہ ہٹائے ہوئے سیال  
کا پس مرکز م ہے اور برتن کے  
اندرونی سیال کا م اور ہٹائے ہوئے  
سیال کا وزن و ہے اور اندرونی سیال  
کا و برتن کی کیت کے مرکز ث کے  
گرد معیار لینے سے حاصل سیالی دباؤ برتن  
کو متوازن کرنے کا میلان رکھیں گے  
یا اس کے برعکس ہو جب اس کے کہ  
و ث م - و ث م  
مثبت یا منفی ہو یعنی ہو جب اس کے کہ

$$\frac{و}{ث} < ۱ \text{ یا } \frac{و}{ث} > ۱$$

مثال — ایک کھوکھلا مخروط جس میں پانی ہے پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر  
کہ اس کا محور تقصابی ہے —

فرض کرو کہ ف = مخروط کے محور کا طول  
ف = مخروط کے اندرونی سیال میں ڈوبے ہوئے محور کا طول  
ی = بیرونی سیال کی سطح کے نیچے ڈوبے ہوئے محور کا طول  
مخروط کے نزدیک اس کو ۲ ع لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$م = \frac{۳}{۴} ی س ع$$

$$م ث = \frac{۳}{۴} ف - \frac{۳}{۴} ی$$

$$ث م = \frac{۳}{۴} ی ق ط ع - \frac{۳}{۴} ف$$

۱۔ یہ صورت ایسے جہاز سے متعلق ہے جس میں سوراخ ہو گیا ہو اور روکنا ہو۔ اگلی دفعہ ایسے  
سوراخدار جہاز سے متعلق ہے جو سر کے بل اہتر (pitch) کرتا ہے۔

اِسی طرح      ث ه =  $\frac{3}{4}$  ف قطعه -  $\frac{2}{4}$  ف

$$\frac{15}{15} = \frac{9}{9} \quad \text{نیز}$$

اس لئے توازن قائم ہوگا اگر

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 < \frac{y^2 \sqrt{x} - y}{y^2 \sqrt{x} - x}$$

## جہاں مساوات

و۔ و۔ ۱۰ ج ۱۱ ص ۱۱۱ (۱۱-۱۲) = مخروط کا وزن،

سے ہی حاصل ہوگا۔

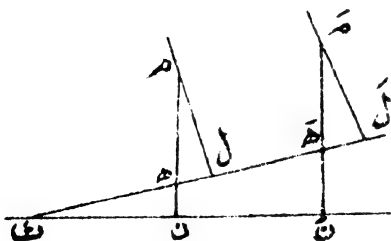
۸۵۔ اگر برہن کے اندرونی سیال اور ہٹائے ہوئے سیال کی کیمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی میں نہ ہوں تو فرض کرو کہ ان مرکوزوں میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی کی سمت میں ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اور جسم اس مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

فرض کرو کہ جسم کی کمیت کا مرکز دشا ہٹائے ہوئے سیال کا ہے، برتن اندرونی سیال کا ہے اور مر مر پس مرکز ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ن ن توازن کے محل میں افقی ہے اور مثل ل  
ہٹائے ہوئے محل میں د میں سے  
گزرنے والا افقی خط ہے۔

اگر وہ کسی کو بھی معنی ہوں  
جو گزشتہ دفعہ میں لئے گئے اور ملے  
ہٹاؤ کا زاویہ ہو تو توازن قائم یا غیر  
قائم ہو گا بموجب اس کے کہ

و مثل < یا > و مثل



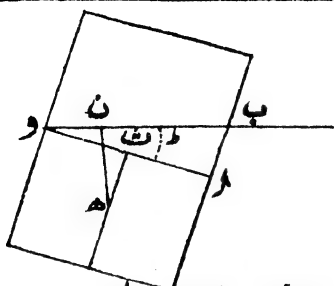
یا (ثان جسم ط + مر ن جب ط) < یا > (ثان جسم ط + مر ن جب ط)  
 اور چونکہ  $\times$  ثان =  $\times$  ثان  
 اس لئے توازن قائم ہوگا یا غیر قائم ہو جب اس کے کہ  
 $\frac{و}{و} < یا > \frac{مر ن}{مر ن}$

۸۶۔ قیود کے ماتحت تیرنے والے جسموں کے توازن کی قائمیت -  
 قید کی ایسی صورتوں میں جس میں چھوٹے ہٹاؤ کے لئے ہٹائے  
 ہوئے مانع کا حجم نہیں بدلتا پس مرکز کا نظریہ سیالی دباؤ کے خط عمل کا تعین  
 کرتا ہے اور قائمیت کا سوال پھر آسانی سے حل ہو جاتا ہے -  
 مثال کے طور پر فرض کرو کہ ایک جسم جزو غرق شدہ، ایک افقی محور کے  
 گرد حرکت کر سکتا ہے اور یہ افقی محور اُس مستوی تراش کے مرکز ہندسی (ج) کے  
 انتصاباً نیچے واقع ہے جو مانع کی سطح جسم میں کاٹی ہوئی ہے -

اگر جسم کو چھوٹے زاویہ ط میں ہٹا دیا جائے تو اس ہٹاؤ کا یہ اثر ہوگا  
 کہ مرکز ہندسی (ج) نیچے بیٹھ جائے گا اور یہ ہٹاؤ ط پر منحصر ہوگا - اور اس لئے  
 غیر مقداروں کے پہلے رتبہ تک ہٹایا ہوا حجم غیر متغیر رہیگا اور پس مرکز دہی ہوگا  
 گویا کہ ج مانع کی سطح میں ہی واقع ہے -

اگر جسم ایسے افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہو جو نقطہ ج کے نیچے انتصاباً  
 واقع نہ ہو تو ہٹائے ہوئے حجم میں جو تبدیلی واقع ہوگی وہ نظر انداز نہیں ہو سکے گی  
 اور قائمیت کے سوال کو ہٹائے ہوئے مانع کے عمل پر بالراست غور کرنے سے  
 حل کرنا پڑے گا -

مثال۔ ایک مستطیل پتھر ایک ل میں جسکی کثافت اکی کثافت کا دو چند  
 ہے ساکن ہے اس طور پر کہ اس کے دو ضلع انتصابی ہیں - یہ پتھر اپنے ایک  
 انتصابی ضلع کے وسطی نقطہ کے گرد اپنے مستوی میں حرکت کر سکتا ہے -  
 شکل پتھر کو تعبیر کرتی ہے جبکہ اسکو چھوٹے زاویہ ا و ب (ط)  
 میں ہٹا دیا گیا ہے - نقطہ و جو مانع کی سطح میں ہے ضلع کا وسطی نقطہ ہے -



اگر  $1 = 1$  اور اگر ارتفاع = ۲ بتو

اوب =  $\frac{1}{p}$  و  $\frac{1}{p}$

اور وہ کے گرد معیار لینے سے  
توازن قائم ہوگا اگر

$$2 \text{ ث } \left( \frac{1}{4} \times \text{ط} + \frac{2}{3} \times \text{و} + \text{ب} \times \text{ن} \right) < \text{ث} \times \text{ب} \times \text{و} \times \frac{1}{2}$$

جہاں ہن نقطہ ہ میں سے گزرنے والا انتصابی ہے۔  
 یعنی چونکہ

ن = وٹ جم ط - ھت جب ط =  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{4}$  ط  
توازن قائم ہو گا اگر

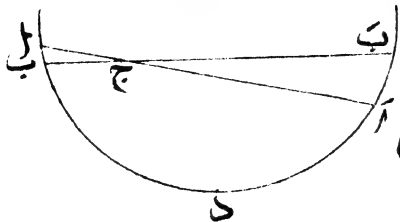
$$2 \leq 3 \leq 2$$

۸۷۔ اس خاص صورت میں جبکہ جسم کی کثیت کا مرکز اور محور جس کے گرد یہ حرکت کر سکتا ہے دونوں مانع کی سطح میں واقع ہوں تو قائمیت کے تعین کے لئے ایک ضابطہ دفعہ (۶۹) کے ضابطہ کے مائل حاصل کیا جاسکتا ہے۔

جس محور کے گرد جسم حرکت کر سکتا ہے اس کو خراج اور توازن کے محل میں ہٹائے ہوئے مائن کے حجم کو ح فرض کر دو۔

فرض کرو کہ آج کڑیہ اوکا ابتدائی مستوی ہے اور ج ما کے گرد (جو کا غز کے مستوی پر عمود وار ہے) ایک چھوٹے زاویہ میں ہٹانے کے بعد خط آ ب ج ب بن جاتا ہے۔

حاصل سیالی دباؤ، وزن ب د ا ب کے مساوی ہے جو اوپر وار عمل کرتا ہے اور یہ ذیل کے وزنوں کے معادل ہے۔



وزن اباد یعنی ج شح جواد پر کی طرف  
عمل کرتا ہے، فائدہ (ب ج) کا وزن جو اید  
کی طرف عمل کرتا ہے اور فائدہ (ب ج) کا وزن  
جو نیچے کی طرف عمل کرتا ہے

ان دونوں قانونوں کی وجہ سے استروادی معیار

$$= \text{ج} \text{ ث ل} \text{ ا} \text{ ط} \text{ فر ل} \text{ ا} \text{ فر} \text{ ا} = \text{ج} \text{ ث ل} \text{ ا} \text{ ط}$$

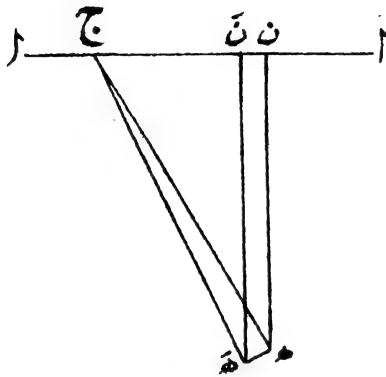
جہاں ج کے گرد رقبہ ل ج کے جہود کا معیار ل ا ط ہے۔  
ہٹاؤ کی وجہ سے معیار کا نقصان

$$= \text{ج} \text{ ث ل} \text{ ا} \text{ ط} \times \text{ن} \text{ ن} = \text{ج} \text{ ث ل} \text{ ا} \text{ ط} \times \text{ن} \times \text{ط}$$

اس لئے توازن قائم ہوگا اگر

$$\text{ل} \text{ ا} \text{ ط} \times \text{ح} \times \text{ن}$$

(۸۷)



۸۸۔ ایسے جسم کی عام صورت میں ہگ گہرائی پر کے ایک افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہو فرض کر دو کہ تیراد کے مستوی پر محور کا ظل ج ا ہے اور ث اور ه کے ظل ل اور ن ہیں۔

صغیر زاد ٹی ہٹاؤ ط کے لئے ج کا انتصابی ہٹاؤ ط کے رقبہ کا ہوگا اور اس لئے نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

گزشتہ دفعہ کی طرح ہٹاؤے ہوئے مانع کے تغیر کی وجہ سے استروادی

$$\text{معیار} = \text{ج} \text{ ث ل} \text{ ا} \text{ ط} \text{ اور ه کے ہٹاؤ سے معیار کا نقصان}$$

= ج ث ح × (ھ ن - گ) ط  
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توازن قائم ہوگا اگر

ج ث (ا س) - ج ث ح (ھ ن - گ) + و (مثال - گ)

مثبت ہو اس شرط کے ساتھ کہ

و × ج ل = ج ث ح × ج ن

نتیجہ صریح - اگر جسم متجانس مائع میں آزادانہ تیر رہا ہو اور تشاکل کا ایک مستوی رکھتا ہو اور اگر اس مستوی میں کسی افقی محور کے گرد جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں کھما دیا جائے تو اسے ردادی جفت ہوگا

ج ث ط (ا س) - ح × ھ (ث)

جہاں تشاکل کے مستوی اور مائع کی سطح کے خط تقاطع کے گرو سطحی تراش کے جہود کا معیار (ا س) ہے۔

۸۹ - ایسے جسم کا توازن جو دو مائعات میں جزو غرق شدہ تیر رہا ہے۔  
فرض کر دو کہ اوپر کے مائع کی کثافت ث اور نیچے کے مائع کی کثافت ھ ہے۔

نیز فرض کر دو کہ کل حجم غرق شدہ ح ہے اور ح ، ح کا وہ حصہ ہے جو نیچے کے مائع میں غرق ہے۔ تیراؤ کے مستویوں کے رقبہ (ا) ، (و) ہیں۔  
تب جسم کے وزن کو تھما سننے والی قوتیں ، مائع کی کمیتوں کے ہوزان ث ح اور ث ا ہیں جو ا پر وار عمل کرتی ہیں۔

ایسی صورت لو جس میں جسم ایک ایسے انتصابی مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے جو ہٹاؤ کی مستوی پر عمود دار ہے ، اس طرح جسم اور کمیتوں ث ح اور ث ا کے مرکز ہندسی ث ، ھ ، ھ ایک ہی انتصابی خط میں ہونگے۔  
اگر جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں تشاکل کے مستوی میں کسی افقی محور کے گرد ہٹا دیا جائے تو توازن کے محل پر لیجانے کا میلان رکھنے والی

قوتوں کا کل معیار ث کے گرو ہوگا  
 ج ث (ا س ر - ح × ہ ث) ط + ج ث (ا س ر - ح × ہ ث) ط  
 یا ج ث ح × ہ ث م × ط + ج ث ح × ہ ث م × ط  
 جس میں ہ ث م اور ہ ث م کی مثبت سمت اوپر وار ہے۔

تو ان صریحاً قائم ہوگا اگر م اور م دونوں ث کے اوپر واقع ہوں لیکن اگر م، ث کے نیچے ہو تو قائمیت کے لئے

$$ث \times ح \times م < ث \times ح \times م$$

یا ث (ا س ر - ح × ہ ث) < ث (ا س ر - ح × ہ ث)  
 ۹۔ غیر متجانس مانع — ایک ٹھوس جسم متغیر کثافت کے مانع میں تیر رہا ہے۔ اچھال کی سطح معلوم کرنا مطلوب ہے۔

پہلے ایک جسم کی صورت میں غور کرو جو ایسے مانع میں تیر رہا ہے جو نزدیکی ترتیب میں مختلف کثافتوں ث، ث، ث، ث، ث کی تہوں پر مشتمل ہے۔ فرض کرو کہ ث کثافت کی تہ کی اوپر کی سطح کے نیچے جسم کا کل حجم غرق شدہ ح ن سے تعبیر ہوتا ہے۔

دفعہ ۷ کی طرح فرض کرو کہ اس مستوی کی ابتدائی آب خطراتش ی = ج ہے اور فرض کرو کہ خفیف طور پر ہٹاے ہوئے محل میں اس مستوی کی مسادات ی = ج + ل + م ماہے تو ہمیں یہ مسادات حاصل ہوتی ہے

$$\{ ث \times ح + (ث - ث) \times ح + (ث - ث) \times ح + \dots + (ث - ث) \times ح \} (لا - لا)$$

$$= \{ ث \times ل + (ث - ث) \times ل + \dots + (ث - ث) \times ل \}$$

$$+ \{ ث \times م + (ث - ث) \times م + \dots + (ث - ث) \times م \}$$

اسی طرح (با - با) اور (ی - ی) کے لئے متناظر ساداتیں حاصل

ہوتی ہیں، یہاں ان دو محلوں میں اچھال کے مرکز بالترتیب (لا، با، بی، لا، ما، ہی) ہیں اور ا، ار، افر، بر، متناظر آب خط تراش پر علی الترتیب دوسرے محلوں

کر لا، افر لا فرما، کر لا، افر لا فرما، کر لا، افر لا فرما

کو تعبیر کرتے ہیں۔

سلسل سیال کی صورت لینے سے

(۸۹)

ک (لا - لا) = ل + ف م

ک (با - با) = فل + ب م

اور ک (بی - ہی) = پ (ل + ل) + فل م + ب م

یہاں ک = ث ح + ث ح فرث

= ث ح + [ث ح] - ث ح فرح

= ث ح فرح

اور ل = ث ا + ث ا فرث

= ث ا + [ث ا] - ث ا فر ا

= ث ا ون + ث ا فر ا

اور اسی طرح کا جلد ب کے لئے ہوگا۔ لاحتہ ان غرق شدہ جسم کی اندپر کی اور پچلی تراشوں سے متعلق ہیں، اس صورت میں ح صریحاً صفر ہے اور اور ان بھی صفر ہے سوائے اس صورت کے جبکہ جسم کا پینڈا چپٹا یا مستوی ہو۔ اچھال کی سطح تین مساواتوں سے دفعہ ۸ کی طرح حاصل ہوتی ہے اور خاص صورت میں جبکہ ف = ۰، اور مبداء اچھال کے مرکز کی متوازن



حالت کے مقام پر رافع ہو تو اس کی مساوات ہو جاتی ہے

$$۲ = ک - \frac{لا}{۱} + ک - \frac{لا}{۲}$$

اور پس مرکزی بلندیاں  $\frac{لا}{۱}$  اور  $\frac{لا}{۲}$  ہیں۔

۹۱۔ ٹھوس جسم جو کلاً غرق شدہ تیر رہا ہے۔

اس صورت میں ہیں اسی طرح کی مساواتیں حاصل ہونگی

$$ک = ل + ث فرح اور ل = ث فرث یا (ث ن - ث ا) + ث ل ث فرث$$

متجانس سیال میں غرق شدہ جسم کی صورت میں اچھال کے مرکز میں کوئی ہٹاؤ نہیں ہوتا۔  
۹۲۔ (۱) مخروط جس کا نصف زاویہ راس  $\alpha$  اور راس نیچے دار ہے۔

اگر راس  $\alpha$  سے کسی تراش کا فاصلہ لا ہو تو

$$ل = \frac{لا}{۲} + لا \sin \alpha$$

$$\therefore فرث = لا \sin^2 \alpha + لا \sin \alpha$$

$$نیز فرح = لا \sin^2 \alpha + لا \sin \alpha$$

$$اور ک = \frac{ل + ث فرث فرح}{ث فرث فرح} = \sin^2 \alpha + \sin \alpha$$

$$= لا \sin^2 \alpha$$

جہاں لا،  $\alpha$  کے اوپر اچھال کے مرکز کا ارتفاع ہے اور اس طرح  
و کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع لا قسط  $\alpha$  ہے۔

(۲) مکافہ نما جس کا وتر خاص ل اور راس نیچے دار ہے۔

$$یہاں ل = \frac{لا}{۲} + لا \sin \alpha \quad \therefore فرث = \frac{لا}{۲} + لا \sin \alpha$$

$$نیز فرح = \frac{لا}{۲} + لا \sin \alpha$$

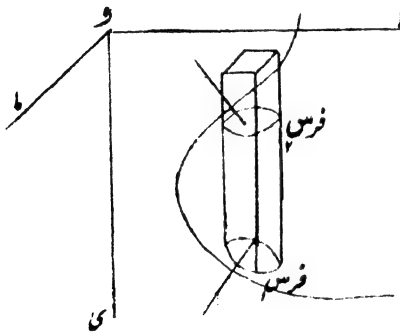
اور  $\frac{1}{2} = \text{کث فرا} / \text{کث فرح} = \frac{1}{2} \text{ ل}$

(۳) اسطوانہ جس کا محور انتصابی ہے۔

یہاں  $\frac{1}{2} = \text{مستقل}$ ، اس طرح  $\frac{1}{2} = \text{شان لن} / \text{ک}$

۳۹۔ توانائی بالقوہ۔ تیرنے والے اجسام کے توازن کی ثابیت کے نظریہ کی بنیاد توانائی کے اصول پر بھی رکھی جاسکتی ہے۔ اور اس نقطہ نظر سے ہم اس مضمون پر اب بحث کرتے ہیں۔

وزن دار مائع کے ایک سمندر میں ایک جسم کو داخل کرنے میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرنا مقصود ہے جبکہ جسم کے دخول سے مائع کی ہوا سطح میں جو تبدیلی ہوتی ہے اور اس میں جو خلل ہوتا ہے ان کو نظر انداز کر دیا جائے۔ اگر عمودی تراش فلا فرما کا ایک انتصابی منشور، جسم کے حدود کو جہاں



مائع اسے مس کرتا ہے عناصر فرس، فرس میں قطع کرے جو سی، سی گہرائیوں پر ہیں اور جن پر کے دباؤ علی الترتیب  $d_1$ ،  $d_2$  ہیں اور اگر  $\rho$ ،  $\rho$  م دہ حادہ زاویہ ہوں جو فرس، فرس پر کے عماد انتصابی خط کے ساتھ بناتے ہیں تو گہرائی کو بقدر ایک صغیر مقدار فری کے بڑھانے میں، ان عناصر پر کے مجموعی دباؤں کے خلاف جو کام ہو گا وہ یہ ہے

(۱) فرس، جم  $\rho$  - ۲ فرس، جم  $\rho$  (فری = (۲ - ۱) فلا فرما فری

اس لئے زیر بحث محل میں جسم کو رکھنے میں جو کام ہوا وہ

= { فلا فرما (۱) ۲ فری - (۲) ۱ فری } =

$$= \{ \text{فرلا فرما} \} \text{دفری}$$

$$= \{ \text{دفرلا فرما فری} \} \dots \dots \dots (1)$$

جہاں تکمیل غرق شدہ حجم پر لیا گیا ہے۔

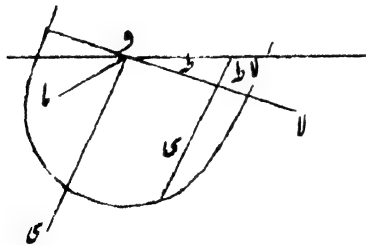
اگر مانع متجانس ہو تو د = ج ث ی اور کام جو ہوا وہ

(۹۱)

$$= \text{ج ث ی فرلا فرما فری}$$

$$= \text{ج ث ح ی}$$

جہاں ہٹائے ہوئے مانع کا حجم ح اور اس کے مرکز ہندسی کی گہرائی ی ہے جب کوئی جسم مانع میں تیر رہا ہو تو اس کو مانع کے اندر رکھ دینے میں جو کام ہوا ہے اس کی وجہ سے اس میں توانائی بالقوہ آجاتی ہے اور اگر مانع متجانس ہو اور جسم اور ہٹائے ہوئے مانع کی کیتوں کے مرکز ثا ہوں اور ان کی گہرائیاں ط، ی ہوں تو جسم کی توانائی بالقوہ کا ناپ ج ث ح (ح-ط) مانا جاسکتا ہے۔ یا جب جسم توازن میں تیر رہا ہو تو ح ث ح × ہ ث ی



۹۴ - تیرنے والے جسم کو تیراؤ کے مستوی کے کسی محور کے گرد پھوٹے زاویہ ط میں گھمانے میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرنا۔

یہ صفحہ عمل تشکیل بالکل فرضی ہے جس میں یہ خیال کیا جاتا ہے کہ وہ فضا جس کو جسم گھیرے ہوئے ہے ہی قسم کے مانع سے بھر دی گئی ہے اور جسم کی کل کیت مانع کی ہموار آزاد سطح پر ہے۔

فرض کرو کہ وہ گروہ کا محور اور وی انتصاباً نیچے کی طرف سے اور فرض کرو کہ مستوی لاوی میں جسم کی کمیت کا مرکز ثقل اور اچھال کا مرکز ہوا ہے۔ فرض کرو کہ وہ اور ثقل کے محدود علی الترتیب (لا، ی، ج) اور (ض، ط، ظ) ہیں۔ توازن کی صورت میں لا = ضا

ابتدائی محل میں ہٹائے ہوئے مائع کی وجہ سے توانائی بالقوہ

$$= ج \times ح \times ی + \frac{1}{2} ج \times ث \times ی^2 \text{ فرلا فرما}$$

وہاں کے گرد جسم کو ایک منبہ زاویہ طہ میں گھاؤ اور فرض کرو کہ محاورہ لاوی جسم کے ساتھ حرکت کرتے ہیں۔

اس منشور کا غرق شدہ طول جسکی عمودی تراش فرلا فرما ہے  
 $ی + لا \text{ مسطہ} = ی + لا طہ$  ہو جاتا ہے اور اس کی کمیت کے مرکز کی گہرائی  
 $\frac{1}{2} (ی + لا طہ)$  جم طہ ہے۔ اس لئے ہٹائے ہوئے مائع کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں اضافہ

(۹۲)

$$= \frac{1}{2} ج \times ث \times ی^2 (ی + لا طہ) - (ا - \frac{1}{2} طہ) \text{ فرلا فرما} - \frac{1}{2} ج \times ث \times ی^2 \text{ فرلا فرما}$$

$$= \frac{1}{2} ج \times ث \times ی^2 (لا - \frac{1}{2} طہ) \text{ فرلا فرما} + ج \times ث \times طہ \times لا ی \text{ فرلا فرما}$$

لیکن جسم کے ہٹاؤ کی وجہ سے توانائی بالقوہ کا نقصان

$$= ج \times ح \times (طا جم + ضا جب طہ - طا)$$

$$= - \frac{1}{2} ج \times ث \times طہ \times طا + ج \times ث \times طہ \times ضا$$

اس لئے توانائی بالقوہ میں کل زیادتی

$$قا = \frac{1}{2} ج \times ث \times طہ \times (لا - \frac{1}{2} طہ) \text{ فرلا فرما} + ج \times ث \times طہ \times طا$$

$$= \frac{1}{2} ج \times ث \times طہ \times (لا - \frac{1}{2} طہ + ح \times ح \times طا)$$

$$= \frac{1}{2} ج \times ث \times طہ \times (لا - \frac{1}{2} طہ + ح \times ح \times طا) \dots (۱)$$

جہاں جسم کی سطحی تراش کا رقبہ  $\Delta$  اور  $\rho$  مائے گرد اس کی گردش کا نصف قطر  $r$  ہے۔

اس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$(\rho \Delta < \text{ح} \times \text{ھ ث}) \text{ اور استرادی جفت ہوگا}$$

$$\frac{\text{فرقا}}{\text{وزن}} = \text{ج ث ط} (\rho \Delta - \text{ح} \times \text{ھ ث})$$

۹۵۔ اگر ہٹائے ہوئے مانع کا حجم مستقل ہو اور اگر ہٹائے ہوئے محل میں اچھال کے مرکز میں سے گزرنے والا انتصابی خط کھٹ کو نقطہ  $\rho$  میں قطع کرے تو  $\rho$  کو مرکز مابعد یا پس مرکز کہتے ہیں۔

پس مرکز کے وجود کے لئے تخلیلی شرطیں یہ ہیں

$$((\rho \Delta + \text{ی + لاط}) \text{ فرلا فرما} = ((\rho \Delta \text{ فرلا فرما} \text{ یا } ((\rho \Delta \text{ فرلا فرما} = .$$

یعنی گردش کا محور و سطحی تراش کے مرکز ہندسی میں سے گزرنا چاہیئے۔  
(دفعہ ۵۲ کے ساتھ مقابلہ کریں)۔ اور چونکہ اچھال کا نیا مرکز، مستوی لاوی میں ہونا چاہیئے اس لئے

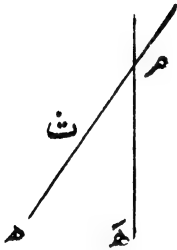
$$((\rho \Delta + \text{ی + لاط}) \text{ فرلا فرما} = .$$

$$\text{لیکن } ((\rho \Delta \text{ فرلا فرما} = . \therefore ((\rho \Delta \text{ فرلا فرما} = .$$

۱۔ بعض علماء نقطہ پس مرکز کو ذرا وسیع معنوں میں استعمال کرتے ہیں چنانچہ پس مرکز کی تعریف وہ اس طرح کرتے ہیں کہ یہ وہ نقطہ ہے جہاں اچھال کی سطح کے دو متصل عمادوں کا درمیانی اقل فاصلہ ان عمادوں میں سے ایک کو قطع کرتا ہے۔

(۹۳)

یعنی محور واسطی تراش کا صدری محور ہونا چاہیئے۔  
اس صورت میں یہ ظاہر ہے کہ اگر م، فٹ کے اوپر واقع ہو تو جسم کے وزن اور حاصل سیالی دباؤ سے بنا ہوا جنت جسم کو واپس توازن کے محل پر لچائیکا میلان رکھے گا اور



$$\begin{aligned} &= ج \text{ ث } ح \times ف \times م \times ط \\ &= ج \text{ ث } ح (ھ م - ھ \text{ ث}) ط \\ &= ھ م = \frac{ا \text{ ر } ا}{ح} \text{ اور توازن قائم} \\ &\text{یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ م،} \\ &\text{ث کے اوپر ہو یا نیچے۔} \end{aligned}$$

چونکہ پس مرکز اچھال کی سطح کے متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے اسلئے عام طور پر ھ پر کی سطح کے صدری اختنا کے دو مستویوں میں اگر ہٹاؤ لئے جائیں تو ان کے جواب میں دو پس مرکز ہونگے۔ اور اچھال کی سطح کا ایک صدری نصف قطر اختنا ھ ہے۔

۹۶۔ مقید اجسام۔ ایک تیرنے والا جسم ایک ثابت افقی محور کے گرد گھومنے پر مجبور ہے۔ اس صورت پر دفعہ (۹۳) کی طرح غور کیا جاسکتا ہے۔

اگر واثبات محور ہو اور (ضا، عا، طا)، (لا، ما، می) علی الترتیب ث اور ھ کے محدد ہوں اور و جسم کا وزن ہو تو توازن کی شرط ہوگی

ج ث ح لا = و ضا  
اگر گردش کا محور تیراؤ کے مستوی میں ہو اور جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں گھمایا جائے تو ہٹائے ہوئے مانع کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں اضافہ

$$= \frac{1}{2} ج \text{ ث } ط^2 (ا \text{ ر } ا - ح \text{ می}) + ج \text{ ث } ط \text{ ح لا}$$

اور جسم کے ہٹاؤ کی وجہ سے نقصان

$$= - \frac{1}{2} ط^2 و ط ا + ط و ضا$$

اس لئے توانائی بالقوہ میں کل زیادتی

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2$$

اور توازن قائم ہو گا بشرطیکہ

$$\left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right) - \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

۹۷۔ اگر گردش کا محور و، گ گہرائی پر ہو اور تیراؤ کے مستوی پر اس کے ظل کو ہم محور و مانیں اور اوپر کی طرح فرض کریں کہ محاذ جسم کے ساتھ حرکت کرتے ہیں تو وہ قدر  $\frac{1}{2} m \dot{\phi}^2$  گ کے نیچے اترتا ہے اور ہٹائے ہوئے مانع کی وجہ سے توانائی باقتوہ میں اضافہ

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right) - \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2$$

$$- \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right) - \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right) - \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2$$

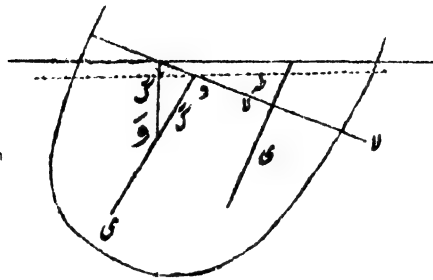
اور جسم پر جاذبہ اثر نے جو کام کیا وہ

$$= \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right\}$$

اس لئے کل بیرونی کام جو ہوا وہ

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right) - \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 \right\}$$

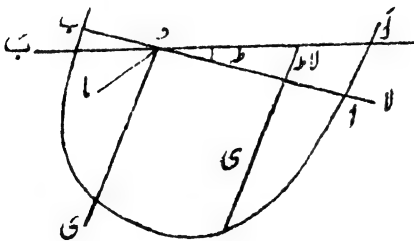
جہاں سطحی تراش کا رقبہ ہے اور تیراؤ کے مستوی پر ثابت محور کا جو ظل ہے اُس کے گرد اس کی گردش کا نصف قطر مہا ہے۔



قائمیت کے لئے شرط ہے -  
 (ا)  $\angle$  ح (ی-گ) - ج  $\frac{1}{2}$  (ط-گ)

۹۸ - غیر متجانس مانع - ایک جسم غیر متجانس مانع میں تیر رہا ہے، تیراؤ کے  
 مستوی میں کے کسی خط کے گرد اس کو گھمانے میں جو کام کیا جاتا ہے اسے معلوم کرو -  
 دفعہ (۹۴) کی طرح محاورہ اور وہی ترقیم استعمال کرو - ہم لے سکتے ہیں  
 ت = ت (ی) لیکن فرد = ج ت فری

$$\therefore د = ج \{ ف (ی) - ف (و) \}$$



دفعہ (۹۳) کے بموجب  
 جسم کو کسی محل میں مانع کے  
 اندر داخل کرنے میں جو کام  
 کرنا پڑتا ہے وہ

کرکر فر لا فری ہے  
 جہاں تکمیل غرق شدہ حجم  
 پر لیا گیا ہے - جسم کو جب  
 ایک صغیر زاویہ طہ میں گھمایا  
 جائے تو یہ کام ہو جائیگا



[[[ د فرلا فرما فری + [[[ د فرلا فرما فری  
لاط

یہاں عنصر فرلا فرما فری پر کانیا باؤ د ہے اور پہلے تکرار کی وسعت د ہی ہے جو پہلے تھی لیکن دوسرا تکرار ناؤں (و) ب و ب کے اندر لیا گیا ہے۔

(۹۵)

اب د = ج { ف (ی) - ۱/۲ ی ط + لاط } - ف (۰)

= د + ج (لاط - ۱/۲ ی ط) + ف (ی) + ۱/۲ ج لاط ف (ی)

∴ [[[ د فرلا فرما فری = [[[ د + ج ط لاط - ۱/۲ ج ط (ی) - ۱/۲ ف (ی) ] { فرلا فرما فری

ناؤں سے متعلق تکرار میں ی ہر جگہ لاط اور د کے جملہ بالا میں ط کی صرف پہلی قوت برقرار رکھنے سے

د = ج { ف (ی) - ف (۰) + لاط ف (ی) }

= ج { ی ف (۰) + لاط ف (ی) }

∴ [[[ د فری = ج { - ۱/۲ لاط ف (۰) + لاط ف (۰) - لاط ف (لاط) }

= ۱/۲ ج لاط ف (۰) = ۱/۲ ج ف لاط

اس لئے ہٹاؤ پیدا کرنے میں مانع کے دباؤں کے خلاف جو کام ہوا وہ توانائی

بالقوہ میں اضافہ ہے اور

ج ط [[[ لاط فرلا فرما فری - ۱/۲ ج ط [[[ (ی) - ۱/۲ ف (ی) ] فرلا فرما فری

+ ۱/۲ ج ف لاط [[[ لاط فرلا فرما

لیکن جسم کے وزن نے جو کام کیا وہ



مستقل کمیت کے لئے شرط یہ ہے

[[[ک (ی + لاط) فرلا فرما فری + [[ک لاط فرلا فرما = [[ک (ی) فرلا فرما فری  
یا [[[ک (ث + لاط فری) فرلا فرما فری + ث ط ل لا فرلا فرما = [[ک (ث) فرلا فرما فری  
یا [[[ک لاط فری فرلا فرما فری + ث ط ل لا فرلا فرما = .

اور دوسری شرط کے لئے ضروری ہے کہ

[[[ک (ی + لاط) ما فرلا فرما فری + ث ط ل لا ما فرلا فرما = .

لیکن

[[[ک (ی) ما فرلا فرما فری = .

∴ یہ شرط ہو جاتی ہے

[[[ک لاط فری فرلا فرما فری + ث ط ل لا ما فرلا فرما = .

دونوں شرطیں پوری ہونگی اگر محوری کے گرد تشاکل ہو۔ یا اگر مستوی ماوی  
میں کے تمام افقی خطوط، متناظر افقی ترشوں کے ہندسی مرکبوں میں سے گزرنیوالے  
صدری محور ہوں اس طرح کہ تمام گہرائیوں پر

[[[ک لاط فرما = . اور [[ک لاط فرما = .

جب یہ شرطیں پوری ہوں اور مرکز ہو تو استرادی جنت

× ث م × ط یا و (ھ م - ھ ث) ط

= ط { ج ث ا س ا ب ک ث فری (ا س ا) فری - و ھ ث } ×

۱۰۔ د = ج { ت (ا + کث) فری (ا سنا) فری }

جہاں تکمل زیر ترین ہموار سطح سے سطحی تراش تک لیا گیا ہے۔

۱۰۰۔ چونکہ دفعہ (۹۳) کا نتیجہ (۱) درست ہے خواہ جسم مائع کے نیچے نکلا ہوا ہو یا نہ نکلا ہو اس لئے گزشتہ دو دفعات کے نتائج بھی ہر ایک صورت میں درست ہیں اور چونکہ دفعہ (۹۴) کا جملہ (۱) دفعہ (۹۸) کے جملہ (۱) کی صرف ایک خاص صورت ہے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ متجانس مائع کے لئے بھی حاصل شدہ نتائج درست ہیں خواہ جسم مائع کے نیچے نکلا ہوا ہو یا نہ ہو۔

(۹۶)

۱۰۱۔ کلا غرق شدہ جسم — ایک جسم غیر متجانس مائع میں کلا غرق شدہ تیر رہا ہے۔ اس کو کسی افقی محور کے گرد

ایک تغیر زاوے میں گھمانے میں

جو کام کیا جاتا ہے اسے معلوم کرو۔

اد پر کی طرح و ما کو گردش کا محور

لو اور فرض کرو کہ محاور و لاوی

جسم میں ثابت ہیں۔ نیز فرض کرو

کہ و ما کی گہرائی گ ہے اور

ت = ف (گہرائی)

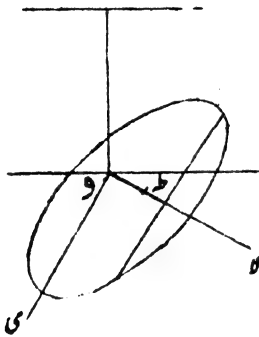
اس طرح توازن کے محل میں

د = ج { ت (ی + گ) - ت (و) }

اور ہٹائے ہوئے محل میں

د = ج { ف (ی - ۱/۲ ی ط + گ + لا ط) - ت (و) }

= د + ج (لا ط - ۱/۲ ی ط) ف + ۱/۲ ج لا ط ف فری



و ما کے گرد جسم کو ایک صغیر زاویہ طہ میں لکھانے میں جو کام مانع کے دباؤں کے خلاف کرنا پڑتا ہے وہ

$$= \{ (3-5) \text{ فرلا فرما فری} \} \text{ [دفعہ (۹۳)]}$$

= ج ط { ج ط } لاٹ فرلا فرما فری +  $\frac{1}{4}$  ج ط { ج ط } لا فری - ثی فرلا فرما فری  
جہاں تکمیل ہٹاے ہوئے مانع کی کل مقدار کے اندر لیا گیا ہے۔ لیکن ہٹاؤ  
میں جسم کے وزن نے جو کام کیا وہ

= و { طا (۱-  $\frac{1}{4}$  ط ) + صنا ط - طا }  
جہاں پہلے کی طرح جسم کی کمیت کے مرکز ثقل کے محدود (صنا، طا) ہیں۔

اور و صنا = و لا = { لاٹ فرلا فرما فری }  
اس لئے ہٹاؤ میں کل کام ہو کیا گیا وہ

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \text{ ط } \{ \text{ج ط } \} \text{ لا فری} - \text{فرلا فرما فری} - \text{و (ج - طا)} \\ &= \frac{1}{4} \text{ ط } \{ \text{ج ط } \} \text{ لا فری} - \text{فرلا فرما فری} - \text{و } \times \text{ھ ث} \\ &= \frac{1}{4} \text{ ط } \{ \text{ج ط } \} \text{ لا فری} - \text{فری} - \text{و } \times \text{ھ ث} \end{aligned}$$

(۹۸) جہاں تکمیل جسم کے بلند ترین نقطہ سے زیر ترین نقطہ تک لیا گیا ہے۔  
۱۰۲ — توازن قائم ہوگا اگر جملہ بالا مثبت ہو۔ پس مرکز کا مقام جبکہ اس کا  
وجود ہو اور یہی طرح معلوم ہو سکتا ہے۔ پس اگر مرکز پس مرکز ہو تو استرداد ہی جفت  
و ھ ث  $\times$  ط یا و (ھ مر - ھ ث) ط

$$\begin{aligned} &= \{ \text{ج } \} \text{ لا فری} - \text{فری} - \text{و } \times \text{ھ ث} \text{ ط} \\ &= \text{و } \times \text{ھ مر} = \text{ج } \{ \text{لا فری} \} \text{ فری} \end{aligned}$$



یہ تفسیر لائیں اضافے مف لا کی وجہ سے پیدا ہو۔

ج ث = ۱      انگریز تفسیر

= لا لامف لا - (مف لا - مف ی) ح - (لا ی) - ی مف ی - ی ی مف ی

اب چونکہ

ح = لا لا فلا - ی ی فری

اس لئے لا مف لا = ی مف ی

اس لئے تفسیر = ح (مف ی - مف لا)

یہ نتیجہ اس بات کو زیر نظر رکھ کر بھی فوراً حاصل ہو سکتا ہے کہ ح ٹھوس جسم پر کے حاصل انتظامی دباؤ کے مساوی ہے اور مائع کے چڑھاؤ مف لا کی وجہ سے جسم کا اٹھار مف ی - مف لا ہے۔

۱۰۴۔ ایک اسطوانی برتن کے اندر کچھ مائع ہے، ایک جسم اس مائع کے اندر تیر رہا ہے، جسم کی توانائی بالقوہ۔

جسم کو داخل کرنے سے پیشتر برتن کے اندر جو مائع ہے اس کی ہمواریا ساکن سطح کو فشار کی صفر سطح مانو۔ فرض کرو کہ برتن کی عمودی تراش ہے اور جسم کی آب تراش جبکہ جسم تیر رہا ہو مائع ہے۔ فرض کرو کہ توازن کے محل میں غرق شدہ حجم ج ہے۔ ج ث = ۱ لینے سے، ج جسم کے وزن کو بھی تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کسی دوسرے محل میں غرق شدہ حجم ج ہے۔ اس موخر الذکر محل میں مانی کی ہوا سطح بقدر فاصلہ سے کے اوپر اٹھ جائیگی۔ پس اگر صفر سطح کے نیچے آجھال کے مرکز کی گہرائی گ ہو تو وزن ج بقدر گ۔ اب بلندی کے اوپر اٹھا دیا گیا ہے اور کام جو ہوا دہ ج گ + ج کے مساوی ہے۔ اس لئے اگر صفر سطح کے اوپر جسم کے مرکز ثقل کا ارتقاع ق سے تعبیر ہو تو کل توانائی بالقوہ ہوگی

ج ق + ج گ + ج

اب فرض کرو کہ  $ح = ح + ح$  اور فرض کرو کہ ہٹائے ہوئے محل میں جسم کے حجم  $ح$  کے مرکز ہندی کی گہرائی  $گ$  ہے اس طرح  $ح گ = ح گ + ح صنا$

جہاں  $صنا = \frac{ح}{س_۲} - \frac{ح}{ب}$  بشرطیکہ  $ح$  چھوٹا ہو۔ توانائی بالنتوہ ہوگی

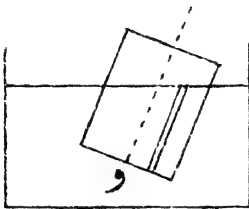
$$ح (ق + گ) + ح \left\{ \frac{ح}{س_۲} - \frac{ح}{ب} \right\} + \frac{ح}{ب} =$$

$$= ح (ق + گ) + ح \left( \frac{ح}{س_۲} - \frac{ح}{ب} \right) + \frac{ح (ق + گ)}{ب}$$

$$= ح ط + \frac{1}{4} ح \left( \frac{1}{س} - \frac{1}{ب} \right) + مستقل$$

(۱۰۰) جہاں  $ط$  اس انقباضی فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے جو مرکز ثقل اور اچھال کے مرکز کے درمیان ہے۔

۱۰۵۔ مثال۔ ایک اسطوانہ دوسرے اسطوانہ میں تیر رہا ہے۔ تیرنے والے اسطوانہ کے قاعدہ کے



مرکز ہندی کو سیدھا لو اور فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ  $ل$  ہے۔ نیز فرض کرو کہ  $ل$  کے سطح کے ستوی کی مساوات

$$ل + م + ن + ی = ع$$

ہے جہاں اوپر وار انتضابی خط کی سمتی جیوب التمام  $ل$ ،  $م$ ،  $ن$ ،  $ی$  ہیں۔

تب  $ح = ل ی$  اور اگر توازن کے محل میں اچھال کے مرکز کا

مقام  $ھ$  ہو تو خط و  $ھ$  کا نکل اوپر وار انتضابی پڑے گا

$$ح = ل (ل + م + ن + ی) ی$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \right\} \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \text{ فرلا فرما} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} \text{ فرلا فرما} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} \text{ فرلا فرما} \\ &\text{جہاں } ع = \text{فرلا فرما، ل = فرلا فرما، م = فرلا فرما، ا = فرلا فرما} \\ &\text{اور تیکھلے عمودی تراش پرے گئے ہیں۔}$$

نیز اگر جسم کے مرکز ثقل کے محور ۱، ۲، ۳، ۴ ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} &ح. ط. ج. (ل + م + ب + ن ج) - \left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \\ &\text{اور } م = \frac{1}{2} \text{، اس طرح توانائی بالقوہ ہوگی} \\ &\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} + \frac{1}{2} (ل + م + ب + ن ج) + \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} + \frac{1}{2} (ل + م + ب + ن ج) \end{aligned}$$

مثلاً فرض کرو کہ ۱ = ب = ۲، اس طرح ث، مرکز ہندسی کے خط دی  
پر واقع ہوگا۔ لکھو ح = اف جہاں ث انتصابی محل میں ڈوبنے کی گہرائی ہے  
تب توانائی بالقوہ ہوگی

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} + \frac{1}{2} (ل + م + ب + ن ج) + \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \\ &\text{ایسی صورت میں جبکہ اسطوانہ تقریباً انتصابی ہو ہم تقریباً } ۱ = \frac{1}{2} (ل + م) \\ &\text{کہتے ہیں۔ اور ل اور م کے سر جو جاتے ہیں} \\ &\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \right\} + \frac{1}{2} (ل + م + ب + ن ج) + \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \end{aligned}$$

پس قائمیت کے لئے  $\frac{1}{2}$  (ف) (ج۲ - ف) کو لازماً تراش کے جوہر کے کم سے کم معیار سے کم ہونا چاہیئے۔

مزید براں اگر تراشش دائرہ یا کوئی ایسی شکل ہو جس کے لئے  $e = b$ ، جب = تو توانائی بالعموم ایسے محل میں جس میں محور انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنانا ہرگز ہوگی

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{f'} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e'} \right) = 0$$

ہٹائے ہوئے حجم کو مستقل لینے سے  $e = 0$ ، اس طرح ماکل محل میں توازن (۱۰) کے لئے لازماً

$$- \frac{1}{2} (f - f') + \frac{1}{2} (e - e') = 0$$

جس سے  $e$  کی ایک حقیقی قیمت ملتی ہے جبکہ

$$\frac{1}{2} (f - f') < 0$$

یعنی جبکہ انتصابی محل غیر قائم ہے۔

امثلہ

۱۔ پانی سے بھاری شے کا ایک برتن ہے جس کو اوندھا کر کے پانی کی سطح پر رکھا گیا ہے، اس میں اتنی کافی ہوا ہے کہ وہ تیر سکتا ہے۔ اگر اسکو کچھ فاصلے میں پانی کے اندر ذرا نیچے ڈکیل دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ توازن کے ایسے محل میں ہوگا جو انتصابی ہٹاؤ کے لئے غیر قائم ہے۔

۲۔ ایک ٹھوس مکافہ میں اپنا اپنے محور پر ایک عمود وار ستوی سے محدود ہے۔ اگر یہ تیر رہا ہو اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی ہو اور اس پانی میں غرق ہو تو ہٹائے ہوئے مانع کے مرکز نقل کے اوپر پس مرکز کار تفرع و ترخاص کے نصف کے مساوی ہوگا۔

۳۔ ایک مخروط جس کا زاویہ راس  $\theta$  ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس نیچے کی طرف ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا پس مرکز

تیراؤ کے مستوی میں واقع ہوگا اور اس کا توازن قائم ہوگا بشرطیکہ اس کی کثافت اضافی  $\frac{2}{43} <$  -

۴ — ایک مساوی الساقین نانہ اس طرح تیرا ہے کہ اس کا قاعدہ افقی ہے اور اس کی دھار پانی میں غرق ہے۔ ثابت کرو کہ ایسے بٹاؤ کے لئے جو دھار کے علی التوا اہم مستوی میں وقوع پذیر ہو توازن قائم ہوگا اگر فائدہ کی کثافت اور سیال کی کثافت کی باہمی نسبت اس نسبت جہم ۴ ع : اسے بڑی ہو جہاں ۲ ع فائدہ کا زاویہ ہے

۵ — ایک بند اسطوانی ظرف برف سے ایک چوتھائی بھر دیا گیا ہے۔ اور انتصابی محور کے ساتھ پانی میں اسے تیرنے کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے ظرف کا وزن اُس پانی کے وزن کا ایک چوتھائی ہے جو اس میں ساکتا ہے۔ برف کے پگھلنے سے پہلے اور بعد توازن کی نوعیت کی جانچ کرو۔ جبکہ تپش کی تبدیلی کی وجہ سے حجم کی تبدیلی نظر انداز کر دی جائے۔

۶ — ایک ٹھوس جسم دو ہرے مخروط کی شکل کا ہے اور دو مساوی دائری رخوں سے محدود ہے اور اپنے سے دو چند کثافت کے مائع میں افقی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا یا غیر قائم اگر نصف زاویہ راس بالترتیب ۹۰ سے کم ہو یا زیادہ۔

۷ — ایک اسطوانی جہاز کی عودی تراشیں، ل و تر خاص کے دو مساوی مکانیوں کی دو مساوی توئیں ہیں جو پینڈے پریس کرتی ہیں، پینڈا ان مکانیوں کا مشترک راس ہے اور اس طرح جہاز کے پہلو بلحاظ پانی کے متعین ہیں۔ جہاز سیدھا تیر رہا ہے اور اس کا پینڈا گ گہرائی پر ہے۔ ثابت کرو کہ پینڈے کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع ہے

گ (  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$  )

۸ — ایک گردشی مجسم کے کسی قطعہ کو جو قائم تراش سے پیدا ہوتا ہے مائع میں غرق

کرنے سے اچھال کے مرکز اور پس مرکز کا درمیانی فاصلہ ہمیشہ مستقل رہتا ہے۔  
خواہ قطعہ کی بلندی کچھ ہی ہو، گردشی مجسم کی شکل دریافت کرو۔

۹۔ پانی پارہ پراساکن ہے اور ایک مخروط اس قدر وزنی ہے کہ جب تک اس کا اس پارہ کے اندر نہ گھس جائے یہ ساکن نہیں رہ سکتا۔ مخروط کی کثافت معلوم کرو تاکہ توازن قائم ہو سکے۔

۱۰۔ اگر تیر نے والا جسم اسطوانہ ہو جس کا محور انتصابی ہے اور جس کی کثافت احصائی، مانع کی کثافت اضافی کے ساتھ نسبت نہ رکھتی ہے تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر قاعدہ کے نصف قطر اور بلندی کی باہمی نسبت ۲:۱ (۱:۲) سے بڑی ہو۔

۱۱۔ مکانی نما شکل کا یکساں خول انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے اور اس کا تین چوتھائی حصہ پانی کے نیچے غرق رہتا ہے جبکہ اس کو محور کی طم گہرائی تک ایسے مانع سے بھریا جائے جس کی کثافت ۵ ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔  
۱۲۔ گردشی مکانی نما کی شکل کے ایک طرف میں پانی ہے اور یہ طرف ایک ثابت کھر درے کرہ پراساکن ہے اس طوریکہ اس کا اس کرہ کے بلند ترین نقطہ پر ہے۔ توازن کے قائم ہونے کی شرط معلوم کرو۔

۱۳۔ ایک بے وزن اسطوانی خول میں مانع ہے اور یہ خول دوسرے مانع میں تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ اندرونی مانع کی کثافت کو بیرونی مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ایک سے کم ہو اور اس نسبت ثناتہ کے نصف سے بڑی ہو جو اسطوانہ کے نصف قطر کو اندرونی مانع کی گہرائی کے ساتھ ہے۔

۱۴۔ ایک نصف کرہ کی خول کو جس میں مانع ہے ایک ثابت کھر درے کرہ کے راس پر رکھ دیا گیا ہے جس کا قطر خول کے قطر کا دوچند ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا ہو جب اس کے کہ خول کا وزن مانع کے دوچند وزن سے بڑیا چھوٹا ہو۔

۱۵۔ ایک گردشی جسم اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ اس کی شکل معلوم کرو جبکہ پس مرکز کا مقام مانع کی کثافت پر منحصر نہ ہو۔

۱۶۔ ایک مخروطی خول نیچے دار راس کے ساتھ غیر قائم توازن میں تیر رہا ہے۔

توازن قائم بنانے کے لئے اس میں کتنا پانی ڈال دیا جائے۔

۱۷۔ ایک ٹھوس مخروط مائع میں اس طرح رکھ دیا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس کا راس نیچے وار برتن کے قاعدہ پر جس میں مائع ہے ٹکا ہوا ہے۔ اگر مائع کی گہرائی مخروط کے ارتفاع کا نصف ہو اور اس کی کثافت مخروط کی کثافت کا چار گنا ہو تو ثابت کر دو کہ توازن قائم ہوگا اگر مخروط کا زاویہ راس ۹۰° سے بڑا ہو۔

ٹھوس مخروط کی بجائے اسی ارتفاع کا ایک پتلا مخروطی غول رکھ دیا گیا ہے جس کا زاویہ راس ۹۰° ہے اور جس کے اندر محور کے وسطی نقطہ کی ہوا سطح تک مائع ہے اور اس مائع کی کثافت بیرونی مائع کی کثافت کا نصف ہے۔ ثابت کر دو کہ توازن قائم ہوگا اگر غول کا وزن اس کے اندرونی مائع کے وزن کے تین چوتھائی سے کم ہو۔

۱۸۔ ایک اسطوانی ظرف میں جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے پانی ہے۔ اس ظرف کو ایک ثابت گہر در سکرہ کے راس پر رکھ دیا گیا ہے اسطوانہ اس کے قاعدہ کا مرکز کرہ کو مس کرتا ہے۔ صغیر ہٹاؤ کے لئے قائمیت کی شرط معلوم کرو۔ اور اگر اس قسم کے ہٹاؤں کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کر دو کہ چھوٹے احمہ دود ہٹاؤں کے لئے یہ توازن غیر قائم ہوگا۔

۱۹۔ ایک گردشی مجسم کی شکل معلوم کرو جو انتصابی محور کے ساتھ پیرتا ہے اسطور پر کہ مجسم کے زیر ترین نقطہ سے پس مرکز اور اچھال کے مرکروں کے فاصلوں کے درمیان مستقل نسبت رہتی ہے خواہ مائع کی کثافت کچھ ہی ہو۔

۲۰۔ ایک نصف دائری اسطوانہ انتصابی محور کے ساتھ ایک مائع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چندان ہے ساکن ہے۔ اگر یہ اسطوانہ اس خط کے گرد حرکت کر سکے جو انتصابی مستوی رخ اور سطح کا خط تقاطع ہے تو قائمیت کی شرط معلوم کرو۔

۲۱۔ ایک قائم مستدیر مخروط افقی محور کے ساتھ ایک مائع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چندان ہے پیر رہا ہے۔ اس کے راس کو مائع کی سطح میں ایک ثابت نقطہ کے ساتھ وصل کر دیا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ قائمیت کے لئے زاویہ راس کو ۹۰° سے کم ہونا چاہیے۔

(۱۰۳)

۲۲ — ایک اسطوانی ظرف اپنے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہے، اور اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہو۔ اگر اس میں پانی ڈال دیا جائے تو ثابت کرو کہ ابتدا میں توازن غیر قائم ہوگا۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ کافی پانی ڈالنے سے توازن قائم بنانا ممکن ہو۔

۲۳ — دئے ہوئے وزن کا ایک مخروطی ظرف اپنے افقی قاعدہ کے ایک قطر کے گرد حرکت کر سکتا ہے، اس کو ایک وزن دار سیال سے جزو بھردیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن ہمیشہ قائم ہوگا اگر مخروط کا نصف زاویہ  $\alpha > 30^\circ$  لیکن اگر زاویہ اس سے بڑا ہو تو معلوم کرو کہ توازن کب قائم ہوگا اور کب غیر قائم۔

۲۴ — پانی ایک ظرف میں ہے جس کا قاعدہ افقی ہے۔ اس میں ایک مکانی نما ہے جس کا راس ظرف کے قاعدہ پر ٹکا ہوا ہے۔ مکانی نما کو سیال اور قاعدہ جزو بھردیا ہوا ہے۔ مکانی نما کی کثافت نوعی پانی کی کثافت کا ہے۔ اسے اور اس کے محور کے طول کو وتر خاص کے ساتھ نسبت ۸:۹ ہے۔ سیال کی کم سے کم گہرائی معلوم کرو جس کے لئے توازن قائم ہوگا۔

۲۵ — ایک مکانی نما پالہ جس کا وزن  $W$  ہے ایک افقی میز پر کھڑا ہے اس کے اندر پانی کی کچھ مقدار ہے جس کا وزن  $N$  ہے۔ اگر پالہ اور اس کے اندر کے پانی کے مرکز ثقل کا ارتفاع  $f$  ہو تو توازن قائم ہوگا بشرطیکہ مکانی نما کا وتر خاص

$$< 2(n+1)f$$

۲۶ — ایک گردشی مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ اس کے محور کے ایک ثابت نقطہ پر اوزان رکھنے سے اس کو مختلف گہرائیوں تک ڈوبا گیا ہے۔ مجسم کی شکل معلوم کرو کہ توازن ہمیشہ تعدیلی رہے۔

۲۷ — ایک ٹھوس مخروط جس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے ایک محور کے گرد جو اس کے تکوینی خط پر منطبق ہوتا ہے حرکت کر سکتا ہے۔ کس گہرائی تک اس نظام کو پانی میں غرق کیا جائے کہ مخروط کا توازن قائم ہو۔

۲۸ — کانگ کا ایک ٹھوس جسم ایسی سطح سے محدود ہے جس کی تکوین ناقص

کے ایک راج کو محور اعظم کے گروگمانے سے ہوتی ہے۔ یہ جسم باہر میں ماسکے تک غرق ہے۔ اگر صغیر زاوی ہٹاؤں کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کر دو کہ

$$۲ز^۲ + ۴ز^۳ + ۳ز^۴ - ز - ۲ = ۰ \quad (ز = خروج المکرز)$$

۲۹۔ ایک ٹھوس مخروط جس کا زاویہ راس ۲ عد ۹۰ سے کم ہے ایک چکنے سید ہے تار کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور اس کے محور پر عمود ہے حرکت کر سکتا ہے۔ اگر تار کو مانع کی سطح میں رکھا جائے تو ثابت کر دو کہ مخروط قائم توازن کے محل میں ہوگا۔ جبکہ اس کا محور افق کے ساتھ زاویہ جب ۲ (جب عد) کا میلان رکھتا ہو۔

۳۰۔ ثابت کر دو کہ تیرنے والے جسم کو اس کے مرکز ثقل کے گرد چھوٹے زاویہ طہ میں سے گھمانے میں یہ کام کرنا پڑتا ہے

$$۱ + ج ث (ا م ر + ا ب ا - ف ح) ط$$

جہاں جسم اور ہٹائے ہوئے مانع کے مراکز ثقل کا درمیانی فاصلہ سے اور جسم کے مرکز ثقل اور تیراؤ کے مستوی کے رقبہ کے مرکز ثقل کے درمیان افقی فاصلہ ب ہے۔

۳۱۔ ایک مکانی نمائندہ جس کا وتر خاص ۴ و سے اور جس کی کمیت کا مرکز راس سے ۲ و فاصلہ پر ہے دو انکسائٹ میں تیر رہا ہے جن کی کثافتیں ۳ اور ۴ ہیں اور (۳ < ۴) ثابت کر دو کہ جسم کو ایک افقی محور کے گرد چھوٹے زاویہ طہ میں گھمانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ ہے

$$\frac{۲}{۳} و ج ط \{ ف (۳ - ۴) + (ن + ف ا) ث \}$$

جہاں ن، ف محور کے وہ طول ہیں جو سیالوں میں غرق ہیں۔

۳۲۔ ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث سیال میں اس طرح تیر رہا ہے (۱۰۴) کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے قاعدہ افقی ہے، اور اس کے رقبہ کا ۱/۴ حصہ

سیال کے نیچے غرق ہے پس اس کا مرکز ثقل پس مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔ دریافت کرو کہ توازن حقیقت میں قائم ہے یا غیر قائم۔

۳۳ — گردشی مکانی نما کی شکل کا ایک مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ اگر مجموعہ کا مرکز پس مرکز پر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا۔

۳۴ — لا ماس کے متوازی ایک مستوی سے سطح ج با = سی (۱' - لا') کو قطع کرنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے وہ اپنے سے ن گنتی کثافت والے سیال میں تیر رہا ہے۔

اگر کسی انتصابی مستوی میں صغیر زاوی ہٹاؤ کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کرو کہ

$$ن = ۳ + ۱ + \frac{۵}{۸} - \frac{۱}{۲} ج$$

۳۵ — ایک متساوی الساقین مثلثی پترا اب ج ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا قاعدہ اب افقی ہے اور مانع کی سطح کے اوپر واقع ہے۔ اگر مانع کی سطح کے نیچے ج کی گہرائی گ ہو تو ج کے اوپر پس مرکز کی بلندی ہے

$$۲ گ قطا ج$$

۳۶ — ایک ناقصی پترا ایک مانع میں نصف غرق شدہ تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا عرضی محور (۱۲) انتصابی ہے۔ مانع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ ثابت کرو کہ پس مرکز کی گہرائی ۳۲ ۱۵/۱۱ ہے۔ جہاں ز، خروج المرکز ہے۔

۳۷ — نصف قطر کا قائم مستدیر اسطوانہ ایک مانع میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس کا طول ج مانع میں غرق ہے اگر ہی گہرائی پر کثافت ف (سی) ہو تو ثابت کرو کہ مرکز مابعد کی گہرائی ہے



کری ذ (ی) فری -  $\frac{1}{2} \pi$  (ج)

کری ذ (ی) فری

۳۸ — ایک گردش مکانی نما، ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور اس نیچے وار ہے - ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا - بموجب اس کے کہ  $\frac{1}{2} \pi$  (ج)  $\frac{1}{2} \pi$  (م) +  $\frac{1}{2} \pi$  سے چھوٹا ہو یا بڑا، جہاں محور کا طول  $\frac{1}{2} \pi$  (ج) اس کا طول غرق شدہ  $\frac{1}{2} \pi$  (م) اور تکوینی مکانی کا وتر خاص م ہے -

۳۹ — ایک چٹا کرہ نما (Oblate Spheroid) ایک مانع میں جسکی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع نصف غرق شدہ تیر رہا ہے اور اس کا محور انتصابی ہے - ثابت کرو کہ مانع کی سطح کے اوپر مرکزہ بعد کا ارتفاع ہے

$$\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi$$

۴۰ — ایک ٹھوس گردش مکانی نما اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی، اس نیچے وار اور اس کے مانع کی سطح میں ہے، مانع کی کثافت ہی گہرائی پر  $\frac{1}{2} \pi$  (ی) +  $\frac{1}{2} \pi$  ہے جہاں تکوینی مکانی کا وتر خاص  $\frac{1}{2} \pi$  ہے - ثابت کرو کہ اس سے پس مرکزہ کا فاصلہ  $\frac{1}{2} \pi$  ہے -

۴۱ — ایک مخروط نیچے وار اس کے ساتھ مانع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع - اگر مخروط کی کثافت مانع کی اس کثافت کے مساوی ہو جو مخروط کے ارتفاع کے  $\frac{1}{2} \pi$  گہرائی پر ہے تو مخروط کا لاد یہ اس جبکہ توازن تبدیلی ہو مساوات

$$\text{جم}^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{2}{5} \right) \frac{1}{5}$$

سے حاصل ہوگا۔

۴۴۔ ف ارتفاع اور م اور تر خاص کا ایک ٹھوس مکانی مناسقبانی محل میں ایک مانع کے اندر اس طرح متوازن ہے کہ اس کا راس نیچے وارہو اور یہ اپنے راس کے گرد جو مانع کی سطح کے نیچے کج گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے حرکت کر سکتا ہے۔ مانع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ ثابت کر دو کہ توازن قائم ہوگا اگر مکانی نما کی کثافت کو اس کے راس پر کے مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ  $\frac{ج^۳ + م^۳}{ج^۲}$  سے کم ہو۔

۴۵۔ نصف زاویہ راس ع کا ایک قائم مستدیر ٹھوس مخروط کلاً غری شدہ ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیرا ہے کہ اس کا راس اوپر وار اور محور انتصبانی ہے۔ اگر مخروط کا ارتفاع ف اور مانع کی سطح کے نیچے اس کے راس کی گہرائی ب ہو تو ثابت کر دو کہ راس سے پس مرکز کا فاصلہ 
$$= \frac{ج^۳ \times ف + ب^۳ + م^۳}{ج^۲ + ب^۲ + م^۲}$$

۴۶۔ ڈھلے ہوئے لوہے کی یکساں موٹی چادر کا ایک اسطوانی پیاجر کا نصف قطر ف اور وزن و ہوئے پانی میں سیدھا تیرا ہے۔ ثابت کر دو کہ اس کا مرکز ثقل نیچے رخ کے اوپر

$$\frac{۲۱۳۹}{۹} + \frac{۹}{۲۱۳۹۳}$$

سے بلند تر نہیں ہو سکتا۔

نیز ثابت کر دو کہ اس کا وزن خواہ کچھ ہی ہو اس کا پس مرکز نیچے رخ کے اوپر  $۹ \times ۱$  فٹ سے زیادہ بلند رہتا ہے۔

۴۷۔ ایک اسطوانی پیالہ یکساں پتلی ڈھلی ہوئی دھات کی چادر سے بنایا گیا ہے پیالہ کی تراش دائری ہے اور اس کا قاعدہ چپٹا اور تخت کھلا ہوا ہے۔ اس کا طول قاعدہ کے نصف قطر کا  $\frac{۱}{۲}$  کم گنا ہے اور پیالہ میں جتنا پانی سا سکتا ہے اس کا وزن

و ہے۔ ثابت کرو کہ پیالہ انتصابی کونوں کے ساتھ قائم توازن میں پانی کے اندر نہیں تیر سکتا اگر اس کا وزن  $(۰.۲۹)$  و اور  $(۰.۸۷۱)$  و کے درمیان واقع ہو۔  
 اگر پیالہ کا وزن  $\frac{1}{2}$  و ہو تو اس میں پانی ڈال کر اس کے توازن کو قائم بنا سکتے ہیں تاکہ انتصابی کونوں کے ساتھ یہ تیرے بشرطیکہ پیالہ میں جو پانی ڈالا جائے اس کا وزن  $\frac{1}{2}$  و اور  $\frac{1}{2}$  و کے درمیان ہو۔

۴۴۔ ایک تختی جس کی کثافت  $\frac{1}{2}$  ہے قطع مکانی کی شکل کی ہے۔ اس کا وتر خاص  $\frac{1}{2}$  و ہے اور یہ اس سے  $\frac{1}{2}$  ف فاصلہ پر کے دوہرے معین سے محدود ہے۔ یہ تختی ایک باغ میں جسکی کثافت  $\frac{1}{2}$  ہے اس طرح تیر رہی ہے کہ اسکی مستوی سطح انتصابی ہے۔ اگر

$$۳ \text{ ف} (۱ - \text{ک}) < ۱۰ \text{ و}$$

$$\text{اور } ۱۰ \text{ و} + (۱ - \text{ک}) < [۵ \text{ ک ف} \{ ۳ \text{ ف} (۱ - \text{ک}) - ۱۰ \text{ و} \}] \frac{1}{2}$$

تو ثابت کرو کہ قائم توازن کے دوئل ہیں جن میں محور انتصابی خط کے ساتھ زاویہ

$$\text{مس} = \frac{۳ \text{ ف}}{۱۰ \text{ و}} (۱ - \text{ک}) - ۲ \frac{1}{2}$$

بناتا ہے۔ جہاں کہ  $\frac{۳}{۱۰} = \frac{۳}{۱۰} \text{ ف} / \text{ش}$

۴۵۔ ایک جسم دو انکعات میں جن کی کثافتیں  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  +  $\frac{1}{2}$  ہیں آزادانہ تیر رہا ہے۔ آزاد سطح اور مشترک سطح سے جسم کی جوتیشیں حاصل ہوتی ہیں ان کے رقبے  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  ہیں اور ان کے مراکز نقل ج اور ج ہیں۔ خفیف ہٹاؤ کے لئے ثابت کرو کہ ہٹاؤ ہوئے سیال کی کثیت وہی نہ ہوگی اگر گردش کا

محور اس انتصابی مستوی میں واقع ہو جو ج ج کو نسبت  $\frac{1}{2}$  :  $\frac{1}{2}$  میں یا  $\frac{1}{2}$  :  $\frac{1}{2}$  :  $\frac{1}{2}$  (ث) :  $\frac{1}{2}$  (ث) میں تقسیم کرتا ہے بوجیب اس کے کہ انکعات غیر محدود ہیں یا ایک ایسے ظرف میں جس کو مستویوں  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  سے تراشنے سے تراشوں کے رقبے  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  ملیں۔

۴۸ — ایک دوہرا دھانی جہاز دوسری اور متشابه جہازوں کو ایک دوسرے کے ساتھ طویل ملا کر بنایا گیا ہے، ہر ایک میں ایک ہی طرح کا ہم وزن بوجھ لاد گیا ہے۔ اگر علیحدہ جہازوں کی صورت میں پہلو پر لٹ گرنے کے لئے مرکز ثقل کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع دہو تو ثابت کرو کہ دوسرے جہاز کی صورت میں یہ ارتفاع

د +  $\frac{1}{2} \frac{b}{c}$  ہوگا جہاں تیراؤ کے مستوی کا رقبہ (کسی ایک کا حجم غرق شدہ ح اور

وسطی مستویوں کا درمیانی فاصلہ ۲ ب ہے۔

۴۹ — ایک منشوری جسم کے رخ یا پہلو خط آب کے نزدیک انتصابی ہیں اس کو (۱۰۶) اس طرح لاد گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل اس کے پس مرکز پر منطبق ہوتا ہے جب کہ اس کو اس کے کناروں کے متوازی محور کے گرد گھما کر اس میں ہٹاؤ پیدا کیا جائے ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔

۵۰ — ایک مخروط ناقص جس کا نصف زیادہ راس سے ہے ایک مال میں جسکی کثافت اس کی کثافت کا دو چند ہے تیرا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ اس طرح تیر سکتا ہے کہ اس کا محور انتصابی سمت سے مائل ہو اور بڑے قطر والا سر سیال کے باہر ہو بشرطیکہ

$$\text{جمہ} < (س + ۳) \frac{۵}{۴} / \frac{۱}{۲} (س + ۳) \frac{۱}{۲}$$

جہاں رنوں کے نصف قطر س اور ر ہیں۔

۵۱ — پتلے مخروطی خول کا ایک بند مقطع جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے متجانس سیال میں تیر رہا ہے اور اس کے اندر زیادہ وزنی دوسرا متجانس سیال ہے۔ ثابت کرو کہ خواہ کونسا ہی رخ غرق کیا جائے قائمیت کی شرط جبکہ محور انتصابی ہو یہ ہے

$$\frac{۲ (۲ + ۲ + ۲)}{۲ (۲ + ۲) (۲ + ۲) - ۲ ۲} > \frac{۲}{۲}$$

جہاں محور کا غرق شدہ طول ف اور کون کا غرق شدہ حصہ ل ہے۔ مقطوعہ کے غرق شدہ رخ کا نصف قطر ہے۔ اور اندرونی و بیرونی دائروں کے خطوط آب کے نصف قطر ہیں۔

۵۲۔ ایک ٹھوس کعب مانع میں انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے ثابت کرو کہ تمام زاوی ہٹاؤں کے لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا۔ ہوجب اس کے کہ تیراؤ کے مستوی سے کعب کی تراش سیدس یا مثلث ہو۔

۵۳۔ ایک ناقص نما ایک مانع میں جس کی کثافت نوعی اس کی کثافت نوعی کا دو چند ہے تیر رہا ہے۔ ایک چھوٹا جنت انتصابی مستوی میں ناقص نما پر عمل کرتا ہے اور اس کو حقیقت طور پر ہٹائے ہوئے محل میں رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ جنت کے مستوی اور سیال کی سطح کا خط تقاطع اور وہ محور جس کے گرد ناقص نما گھومتا ہے باہم مزدوج ہونگے بلحاظ اس واسطی مخروطی کے جو تیراؤ کے مستوی میں ہے۔

۵۴۔ اگر ایک تیر نے والے جسم کا محل غیر قائم ہو تو چونکہ مرکز ثقل دونوں پس مرکزوں کے اوپر واقع ہوگا ثابت کرو کہ جسم میں سطح آب کے مستوی میں ایک خط ثابت کرنے سے اس کے گرد گردش کے لئے قائم محل حاصل ہو سکتا ہے بشرطیکہ یہ خط ایک خاص ناقص کے باہر واقع ہو۔

۵۵۔ ایک ٹھوس متجانس مخروط قائم توازن کی حالت میں ایک سیال میں تیر رہا ہے اس طور کہ اس کا محور انتصابی ہے اور قاعدہ سیال سے باہر ہے۔ سیال کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی کن ویں قوت۔ ثابت کرو کہ مخروط کا نصف زاویہ راس

$$\text{جسم} \frac{2}{\rho_m + \rho_f} \frac{1}{\rho_f}$$

سے بڑا ہونا چاہیے۔ جہاں مخروط کا ارتفاع ف اور محور کا غرق شدہ طول ف ہے۔

۵۶۔ ایک وزن دار متجانس کعب ایک سیال میں یوری طرح غرق کر دیا گیا ہے۔ سیال کی کثافت = گہرائی کے کعب کا مرکز کعب کے دور رخ افقی ہیں۔

ثابت کر دیکیں مرکزی ارتفاع  $\frac{۱۲}{۱۰}$  مہ ہے جہاں مکعب کی کمیت ک اور اس کے

ایک کنارے کا طول ۱ ہے۔

۵۷۔ تمام مستدیر مخروط کی شکل کا ایک پتلا ظن جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے انتصابی محور کے ساتھ ایک مانع میں تیر رہا ہے۔ مانع کی کثافت  $\times$  (۱ + ی) ہے جہاں مانع کی سطح کے نیچے گہرائی ی ہے اور محور کا غرق شدہ طول  $۱$  ہے۔ اگر مخروط کے اندر مہ (۱ +  $\frac{۱}{۳}$ ) کثافت کا مانع ہو تو ثابت کر دو کہ توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$\frac{۳}{۵} \left( \frac{۱۲}{۱۰} \right) < \frac{۱۲}{۱۰} + \frac{۱}{۵}$$

۵۸۔ ایک متجانس وزن دار مکانی شکل کے اسطوانے کا ایک طویل حصہ مکعبوں کے علی القوائم دو مستویوں سے اور ایسے ایک مستوی سے محدود ہے جو مکعبی مکانی کے محور پر عمود وار ہے۔ یہ اسطوانہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محوری مستوی انتصابی ہے اور زیر ترین مکون ایک طرف کے افقی کھر درے پئیدے کو مس کرتا ہے۔ اس طرف میں مانع ڈال دیا گیا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی  $n$  ویں قوت۔ مانع کی گہرائی  $g$  ہے، جسم کا ارتفاع  $f$  ( $< g$ ) اور مکعبی مکانی کا در خاص  $۱۲$  ہے۔ یہ فرض کر کے کہ تیراؤ کی حالت بدلا نہیں ہوتی ثابت کر دو کہ قائمیت کے لئے جسم کی کثافت کو مانع کے زیر ترین طبقہ کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ

$$\frac{۳}{۵} \text{ جا } (۱ + n) \left( \frac{۱۲}{۱۰} \right) < \frac{۳}{۵} \left( \frac{۱۲}{۱۰} \right) + \frac{۱}{۵}$$

سے کم ہونی چاہیے جبکہ

$$۱۲(n+1) < (۱۰ + ۱۲n) \left( \frac{۱۲}{۱۰} \right) + ۱۲$$

جاگتا تفاعل ہے

۵۹۔ ایک یکساں ٹھوس قائم مستدیر مخروط کی کثافت نہ اور زاویہ رأس ۲۴° ہے یہ مخروط ایک سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا رأس نیچے کی طرف اور اس کا قاعدہ سطح کے اوپر ہے۔ سیال کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی کن دین قوت اور مخروط کے ارتفاع کے مساوی گہرائی پر اس کی کثافت ٹھ ہے۔ ثابت کرو کہ انتصابی محل میں توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$(1+n)(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n^2} \text{ (جم } 3+5 \text{ )}$$

نیز یہ کہ مخروط اس صورت میں بھی متوازن ہوگا جبکہ انتصابی کے ساتھ اس کے محور کا سیلان ط مساوات

$$(1+n)(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n^2}$$

$$= (1+\frac{1}{n}) \text{ (جم } 3+5 \text{ )} \text{ ط (جم } 3+5 \text{ ) جب } 3+5$$

سے حاصل ہو۔

۶۰۔ ایک کعب جس کا کنارہ ۱ ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے دو رخ افقی ہیں اور انتصابی کناروں کا طول ۱ پانی میں غرق ہے۔ اگر کعب کو ایک افقی کنارے کے متوازی محور کے گرد ایک محلوہ دروازہ یہ ط میں گھمایا جائے اس طور پر کہ ہٹائے ہوئے پانی کا حجم غیر متغیر رہے اور اوپر کے رخ کا کوئی حصہ غرق نہ ہونے پائے تو ثابت کرو کہ کام جو کرنا پڑتا ہے وہ ہے

$$[ \frac{1}{2} \text{ ط مس ط - (1-1) جب } \frac{1}{2} ]$$

جہاں کعب کا وزن و ہے۔ (دیکھو دفعہ ۱۰۵)

۶۱۔ ایک جہاز کے پیٹے میں پانی ہے اور جہاز سمندر میں تیر رہا ہے۔ ایک ٹھوس جسم کو زین پر کی ایک مشین کے ذریعہ تھام کر جہاز کے پیٹے میں لٹکایا گیا ہے اس طور پر کہ جسم پانی میں جزو غرق رہتا ہے اور پانی کا وزن و ہٹاتا ہے۔ اس کو پھر اور عموماً اعزق کیا گیا ہے تاکہ اس کا صغیر طول ص لا اور

غرق ہو جائے۔ ثابت کرو کہ جہاز اور اس کے اندرونی پانی کی توانائی بالقوتہ میں اضافہ ہے

$$\{ \text{و۔} ۱ \} \left( \frac{\text{و۔}}{\text{ج}} + \frac{\text{و۔}}{\text{ب}} \right) \{ \text{مف لا} \}$$

جہاں جہاز اور اس کے اندرونی پانی کا وزن واپے جسم کے فاصل آب کا رقبہ ۱ اور جہاز کے فاصل آب کا رقبہ ج ہے اندرونی پانی کی سطح کا رقبہ ب ہے۔  
۶۲ — س کافی نما  $\frac{۲}{و} + \frac{۲}{ب} = ۲$  ی کی شکل کا جہاز انتصابی محور کے ساتھ پانی میں تیر رہا ہے۔ اگر اس کو تیراؤ کے مستوی میں کے کسی محور کے گرد محدود زاویہ ط میں گھلایا جائے اور ہٹایا ہو اجم وہی برقرار رہے تو ثابت کرو کہ جو کام کیا گیا وہ ہے

$$\{ \text{ج ش ح} \} \{ \text{ع جب ط۔ ف (۱۔ جم ط۔)} \}$$

جہاں محوری سے گردش کے محور کا عمودی فاصلہ ع ہے اور ابتدائی محل میں مرکز ثقل اور اچھال کے مرکز کے درمیان فاصلہ ف ہے۔  
سم ۶ — بتناؤ کہ جہاز پر ایک وزن کے ہٹانے سے جو بقابلہ کل وزن کے (۱۰۸) چھوٹا ہے جہاز کے جھکاؤ پر اثر کو نہ دریافت ہو سکتا ہے۔ اگر ہٹاؤ افقی عرشہ پر ہو اور وسطی خط سے زاویہ ط بنائے تو ثابت کرو کہ عرشہ کا ڈھال ایسا ہے کہ خط میلان اعظم، وسطی خط کے ساتھ زاویہ مس۔ ۱ (م مس ط) بناتا ہے جہاں پس مرکزی ارتقا عواں کی نسبت م ہے۔

۶۳ — مربع تراش کا ایک کندہ پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کے دونوں مربع رخ انتصابی ہیں اور تین کنارے جو ان رخوں پر عمود ہیں پورے طرح غرق ہیں۔ اگر ایک معلوم کنارہ پانی سے باہر رہے تو ثابت کرو کہ توازن کے تعین محل ہونے کے بشرطیکہ کندہ جس شے کا بنا ہوا ہے اس کی کثافت نوعی  $\frac{۳}{۳}$  اور  $\frac{۳}{۳}$  کے درمیان واقع ہو، اور اگر یہ شہ ط پوری ہو تو ثابت کرو کہ دونوں غیسر





وہ نقطے جو انتصابی ہٹاؤ سے غیر متاثر رہتے ہیں ایک ایسے خط پر واقع ہوتے ہیں جس کی مساوات ہے

$$\text{ضالہ} \quad \frac{\text{عاما}}{\text{وا۔ (ا۔ ن) ل}^2 / 3} + \frac{\text{ب۔ (ا۔ ن) ل}^2 / 3}{\text{ن۔}} = 0$$

جہاں محسوس کی کثافت کو مانع کی کثافت کے ساتھ نسبت ن ہے۔



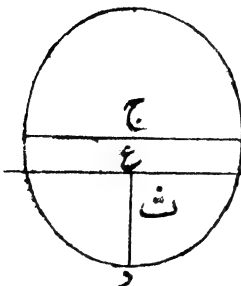
# باب ششم

(۱۰۹)

## تیرنے والے اجسام کے اہترازات

۱۰۶۔ اگر ایک وزن دار جسم مانع میں قائم توازن کے محل میں تیر رہا ہو اور اسے اس محل سے ذرا ہٹا دیا جائے تو وہ چھوٹے انتصابی اور زاویاتی اہترازات کرے گا۔ ظاہر ہے کہ ایسے اہترازات کا سوال ایک ماحرکی سوال ہے اور یہ کہ اگر جسم مانع کی حرکت کو نظر انداز کر دیں تو جسم کے اہترازات کے اودار کے لئے جو نتائج حاصل ہونگے وہ حقیقی دوروں کے ادنیٰ حدود ہونگے۔ اس کتاب کی وسعت کا جہان تک تعلق ہے ہم صرف یہ فرض کر سکتے ہیں کہ مانع کا جمود نظر انداز کیا گیا ہے۔ علاوہ بریں ہم صرف ایک سادہ صورت پر غور کریں گے۔ ہم فرض کریں گے کہ جسم اپنے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی ستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے اور یہ کہ ابتدائی ہٹاؤ اس مستوی کے متوازی ہے۔

ظاہر ہے کہ جسم کے تمام نقطوں کی بعد کی حرکتیں اس مستوی کے متوازی ہوں گی اور اگر توازن قائم ہو تو حرکت چھوٹے انتصابی اور زاویاتی اہترازات پر مشتمل ہوگی۔



اول فرض کرو کہ ث، اور ھ میں سے گزرنے والا خط (ج ع د) تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے۔ جب یہ صورت ہو تو انتصابی اور زاویاتی ہٹاؤں پر ایک دوسرے سے علیحدہ غور کیا جاسکتا ہے۔

ایک چھوٹے انتصابی ہٹاؤ پر غور کرو۔ جسم کے چھوٹے حصہ ج ع کو جسے سیال کے باہر اٹھالیا گیا ہے ایک پتلا اسطوانہ خیال کیا جاسکتا ہے۔  
فرض کر دو کہ ج ع = ی تو ع ث = ج ث - ی اور جسم پر نیچے وار  
قوت = جسم کا وزن - ہٹاے ہوئے سیال کا وزن  
= ج ث ل ی

جہاں تیراؤ کے مستوی کا رقبہ ل ہے۔

(۱۱۰)

$$\therefore \text{کس فرا ع ث} = \frac{\text{ج ث ل ی}}{\text{فرت ۲}}$$

جہاں جسم کی کثیت ک ہے۔

لیکن ک ج = ہٹائے ہوئے سیال کا وزن

= ج ث ح ' جسم کے حصہ ج د کا حجم ح ہے۔

اس لئے مساوات

$$\frac{\text{فرت ۲ ی}}{\text{فرت ۲}} + \frac{\text{ج ث ل ی}}{\text{ح}} = ی$$

سے حرکت کا تعین ہوتا ہے۔

اس لئے پورے ہتزاز کا وقت ہوگا

$$\frac{۲۲}{۲} \sqrt{\frac{۲}{ج}}$$

۱۰۶۔ اب ج کے گرد ایک چھوٹا زادی ہٹاؤ (ع) فرض کرو، تب ث بقدر اُس فاصلہ کے اوپر اٹھیکگا جو ع پر منحصر ہوگا اور اس لئے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ بمقابلہ اُن مقداروں کے جو ع پر منحصر ہوتی ہیں اور پھر اگر جسم کو ساکن فرض کر کے اس کو اپنی حالت پر چھوڑ دیا جائے تو وہ (اس فرض کی بناء پر کہ توازن قائم ہے) ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد ہتزاز کرے گا۔

اگر ابتدائی ہٹاؤ ث کے گرد لیا جائے تو بھی دراصل وہی بات پیدا ہوگی

کیونکہ ایسی صورت میں ج افقی سمت میں قابل قدر فاصلہ طے کر گیا (یعنی صرف پہلے رتبہ کی صغیر مقداروں کا لحاظ کرتے ہوئے) اور ہٹائے ہوئے سیال کی مقدار اوپر کی طرح غیر متغیر رہیگی۔

اگر پس مرکز ہو تو ث کے گرد سیالی دباؤ کا معیار

$$= ج \times ح \times م \times ث جب ط$$

اور ط کو گھٹانے کی طرف اُبل ہوتا ہے جہاں ط وہ زاویہ ہے جو ث ھ انصافی کے ساتھ آن ت پر بناتا ہے۔

$$\text{لیکن } م \times ث = \frac{م \times ل}{ح} - و، \text{ اگر } ھ \times ث = و$$

اب چونکہ ث میں سے گزرنے والا افقی محور صدری محور ہے اس لئے

$$ک م \times \frac{ف \times ط}{ز \times ث} = - ج \times ث (م \times ل - و ح) ط$$

جہاں ط کی اعلیٰ قوتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں اور ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد جسم کے جمود کا معیار ک م ہے۔ یعنی

$$م \times \frac{ف \times ط}{ز \times ث} + ج (ح - \frac{م \times ل}{ح}) ط = ۰$$

(۱۱۱) یہ مساوات چھوٹے اتھرازاات کو تعمیر کرتی ہے جبکہ م  $\times$  ل  $<$  و ح یعنی جبکہ م  $\times$  ل  $<$  و ح کے اوپر واقع ہو اور اتھرازاات وقت

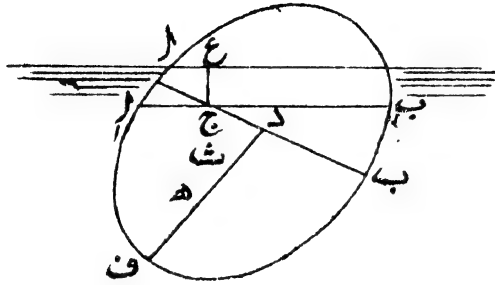
$$۱۲ م \times ل \times \frac{ح}{ج (م \times ل - و ح)} \text{ میں واقع ہوتے ہیں۔}$$

اگر ھ  $\times$  ل کے نیچے واقع ہو تو اس کی علامت بدل دی جائیگی۔

یہ معلوم رہے کہ قاضیت کے پرکھنے کی بجائے اس نتیجے سے اخذ ہو سکتی ہے جو ابھی حاصل کیا گیا۔ اتھرازا کے لئے م  $\times$  ل - و ح کا ایک مثبت مقدار ہونا ضروری ہے۔

۱۰۸۔ ثانیاً اگر ھ اور ث کو لانے والا خط نقطہ ج میں سے نہ گزرے تو

دو وزن حرکتیں ایک دوسرے سے غیر متعلق نہیں ہونگی اور وہ قاذن جو ان حرکتوں کی تعین کرتا ہے طریقہ ذیل سے معلوم ہو سکتا ہے۔



فرض کرو کہ جسم کو تشاکل کے انتصابی مستوی میں خفیف طور پر ہٹا کر چھوڑ دیا گیا ہے اور خط 'ه' 'ث' آن 'ت' پر انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے اور 'ی' = سطح کے نیچے 'ج' کی گہرائی 'ج' 'ع'، فرض کرو کہ 'ه' 'ث' تیراؤ کے مستوی کو نقطہ 'د' پر قطع کرتا ہے اور

$$ه'ث = ا'ج = د = ب، د'ث = د$$

اور دیگر رموز گذشتہ کی طرح۔

تب 'ث' کی گہرائی = 'ی' + 'ب' جب طہ + د جم طہ = 'ی' + 'ب' طہ + د، زیر بحث رتبہ تک۔

ہٹائے ہوئے سیال کا وزن

$$ا'ف + ب + ج + ع$$

کے مساوی حجم کے سیال کا وزن ہوگا۔

$$= وزن = ج'ث + ح + ج'ث ا'ی$$

ایک  $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$  (ی + د + ب ط) = ک ج - (ج ث ح + ج ث ای)

اور

= ج ث ای

یا  $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{\text{ب}}{\text{فرق}} = \frac{\text{ج}}{\text{ح}} \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$  (۱)

(۱۱۲)

ث میں سے گزرنے والے انہی محور کے گرد (جو صدری محور ہے اور ہٹاؤ کے مستوی پر عمود ہے) زاویہ حرکت کو پیش نظر رکھ کر دوسری مساوات حاصل ہوگی۔  
ث کے گرد سیالی دباؤ کے معیار کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔  
ایک تو حصہ ۱ جنہاں پہاڑ کی وجہ سے ہے اور دوسرا ہٹائے ہوئے سیال کے حصہ ۲ ج کی وجہ سے۔

سیالی دباؤ کا قبل الذکر حصہ = ج ث ح جو پس مرکز میں سے اوپر وار عمل کرتا ہے، اور دوسرا حصہ = ج ث ای جو تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے عمل کرتا ہے۔

ط کے گھمٹائے کا میلان رکھنے والی سمت میں معیار

= ج ث ح × اسٹ مر جب ط - ج ث ای (ب جم ط - د جب ط)

= ج ث (مرا - ا ح) ط - ج ث ای (ب - د ط)

= ج ث (مرا - ا ح) ط - ج ث ای ب ی

جہاں ی اور ط کے حاصل ضرب کو نظر انداز کر دیا گیا ہے

نک مرا  $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \text{ج ث (مرا - ا ح) ط} + \text{ج ث ای ب ی}$

مرا  $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \text{ج (مرا - ا ح) ط} + \text{ج ب ی}$  (۲)

(۱) اور (۲) مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} + \frac{\text{ج}}{\text{ح}} (۱ + \frac{\text{ب}}{\text{مرا}}) - \text{ج ب (مرا - ا ح) ط} =$

$$\text{فرت}^2 \text{ط} - \frac{\text{ج} \text{ا ب}}{\text{ح} \text{م}^2} \text{ی} + \frac{\text{ج}}{\text{م}^2} \left( \frac{\text{م}^2}{\text{ح}} - 1 \right) \text{ط} = 0$$

جن کو لکھا جاسکتا ہے

$$(3) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{فرت}^2 \text{ی} + \text{ری} - \text{ب ن ط} = 0 \\ \text{فرت}^2 \text{ط} - \frac{\text{ع ی}}{\text{ب}} + \text{ن ط} = 0 \end{array} \right.$$

ان مساواتوں کو تکمیل کرنے کے لئے دوسری مساوات کو لہ سے ضرب دیکر پہلی مساوات میں جمع کرو اور فرض کر دو کہ

$$(4) \dots \frac{\text{لہ ن} - \text{ب ن}}{\text{رب} - \text{لہ ع}} = \frac{\text{لہ}}{\text{ب}}$$

اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{فرت}^2 \text{ی} + \text{ری} + \text{لہ ط} + \left( \text{ر} - \frac{\text{لہ ع}}{\text{ب}} \right) (\text{ی} + \text{لہ ط}) = 0$$

اور اگر (۴) کی اصلیں لہ لیم ہوں تو

$$(5) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{ی} + \text{لہ ط} = \text{ج} \text{جم} \left\{ \frac{\text{ع}}{\text{ب}} \text{لہ} - \text{م}^2 \right\} + \text{ع} \\ \text{ی} + \text{لہ ط} = \text{ج} \text{جم} \left\{ \frac{\text{ع}}{\text{ب}} \text{لہ} - \text{م}^2 \right\} + \text{ع} \end{array} \right.$$

ان سے ی اور ط پوری طرح معلوم ہو جاتے ہیں۔  
ش کی گہرائی اس شکل کے جلد سے حاصل ہوتی ہے

(۱۱۳)

$$\text{ج} + \text{جم} (\text{م}^2 + \text{ع}) + \text{ب جم} (\text{م}^2 + \text{ت} + \text{ب})$$

اور اس کی حرکت دو مختلف اهتزازوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک قوانین ارتعاش کی پابندی کرتا ہے یہ دونوں اهتزازات صغیر اهتزازات کے ہم وجود ہونے کے



اصول کے مطابق باہم مرکب ہوتے ہیں۔  
یہ دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ اگر اب میں دو نقطے لئے جائیں جن کے فاصلے  
ج سے سمت ج میں لہ، لہم ہیں تو وقت ت پر ان نقاط کی انتصابی گہرائیاں  
سی + لہ ط اور سی + لہ ط ہونگی یعنی گہرائیاں ہونگی

$$ج \{جم\} \{مار - لہ ط - ج\} ت + عم$$

اور اس لئے ان نقطوں کی انتصابی حرکتیں سادہ اہتزازوں میں  
جو قانون بقا کی پابندی کرتے ہیں۔ ڈوہمل (Duhamel) نے اپنی کتاب  
نصاب جہلی دفعہ ۱۵۲ (Cours de mecanique, Art 152) میں اس امر کی دریافت  
کا حوالہ دیتے ہوئے اس کو ایم کوشی (M. Cauchy) کی طرف منسوب کیا ہے۔  
مساواتیں (۵) ارتعاش کی طبعی حسیوں، کو تعبیر کرتی ہیں۔ اہتزازوں کے  
ادوار  $\frac{2\pi}{\omega}$  زیادہ آسانی کے ساتھ سی = (جم (ق ت + صد) اور ط =

ب جم (ق ت + صد) کو مساواتوں (۳) میں مندرج کرنے سے اور نسبت لے کو نتیجہ سے  
ساقط کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

### امثلہ

۱۔ ایک سیدھا ڈنڈا دئے ہوئے ارتفاع سے پانی کی سطح پر انتصاباً گرایا گیا ہے  
اس کی حرکت دریافت کرو اور اس کے لئے بشرط معلوم کرو کہ دو عین غرق ہو جائے۔  
۲۔ ف ارتفاع کا انتصابی اسطوانہ ایک مانع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت  
اسطوانہ کی کثافت کا دو چند ہے۔ مانع ایک اسطوانی ظرف میں ہے۔ اگر ظرف کا  
نصف قطر اسطوانہ کے نصف قطر کا دو چند ہو اور اسطوانہ کو خفیف طور پر انتصاباً  
پٹایا جائے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کا دقت  $\frac{2\pi}{\omega}$  ما ۳ ف ۳ ج ہوگا۔

۳۔ ایک جسم جسکی سطح کا پچھلا حصہ گردی ہے ایک دؤندار سیال میں تیر رہا ہے  
ثابت کرو کہ صغیر زاوی اہتزاز کا دقت وہی ہوگا خواہ کیسی متجانس سیال میں تیرے۔

۴۔ ایک محور نصف کرہ کو جو ایک افقی قطر کے گرد حرکت کر سکتا ہے سیال سے جزو بجزر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ صغیر اہتزاز کا وقت وہی ہوگا جو اُس صورت میں ہوتا جبکہ اس میں سیال نہ ہوتا۔

۵۔ ایک ٹھوس ناقص نما اپنے سے دو چند کثافت نوعی والے مائع میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا چھوٹے سے چھوٹا محور انتصابی ہے چھوٹے انتصابی اہتزاز کا وقت معلوم کرو نیز دوسرے دو افقی محوروں کے گرد صغیر زاویہ اہتزازات کے اوقات معلوم کرو۔

۶۔ ایک کعبہ (جس کے کنارے کا طول ۱۲ ہے) سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا مرکز ثقل سیال کی سطح کے نیچے ب گہرائی پر ہے۔ اگر اس میں صغیر ہٹاؤ پیدا کیا جائے اس طرح کہ اس کے دور رخ انتصابی رہیں تو ثابت کرو کہ اس کے صغیر انتصابی اور زاویہ اہتزازات کے اوقات علی الترتیب ہونگے

$$2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg}} \quad \text{اور} \quad 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg}} \quad \text{ج (۳ ب - ۲)}$$

۷۔ ایک اسطوانہ مائع میں انتصابی اہتزازات کر رہا ہے۔ یہ مائع ایک دوسرے اسطوانہ میں ہے جس کا نصف قطر اول الذکر کے نصف قطر کا ن گنا ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کے محور کا فرق شدہ طول جبکہ وہ سکون کے محل میں ہو

$$2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg}} \quad \text{ج (ن - ۱)}$$

ہوگا جہاں ت ایک پورے اہتزاز کا وقت ہے۔  
۸۔ ث کثافت کی ایک موم جی ث کثافت کے ساکن پانی میں انتصاباً تیر رہی ہے اس کو روشن کر دیا گیا اور دیکھا گیا کہ اس کا شعلہ پانی کی طرف یکساں رفتار سے اتر رہا ہے اور جی جس رفتار سے جل رہی ہے وہ وہ ثابت کرو کہ

$$v = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) g$$

نیز ثابت کرو کہ اگر جی کو اُس وقت بجھا دیا جائے جبکہ اس کا طول ل باقی رہے

تو بتی پانی کے باہر اٹھ کر آجائیگی اگر دو < ماثل ج/ث لیکن اگر

و > ماثل ج/ث تو اس کے ہتھ ازاں کا وقت ۲۲ ماثل لی / ج ہوگا  
 ۹ — ایک قائم مخروط انتصابی محور اور نیچے دار راس کے ساتھ سیال میں تیر رہا  
 ہے اور اس کے محور کا  $\frac{1}{2}$  حصہ غرق ہے۔ مخروط کے وزن کے مساوی ایک  
 وزن اس کے قاعدہ پر رکھ دیا گیا ہے جس سے مخروط واپس اٹھنے کے پیشتر  
 اتنا ڈوب جاتا ہے کہ اس کا محور پورا غرق ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ن + ن + ن = ۷$$

۱۰ — ۲ زاویہ راس کا مخروط و نصف قطر کے اسطوانہ میں اس طرح تیر رہا ہے  
 کہ اس کے محور کا طول و غرق ہے۔ اگر اس کو ایک صغیر طول میں انتصا بانچے و تکمیل  
 دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے ہتھ ازاں کا وقت ہوگا

$$۲۲ \left( \frac{۲۲}{۲۲} \right) \text{ (ن ۲ مس ۲ عد) ف}$$

ج ۲۳

جہاں ف مخروط کا ارتفاع ہے۔

۱۱ — ایک ظرف گردشی مکافہ نما کی شکل کا ہے، اس کا محور انتصابی سے اور  
 اس میں مائع کی اتنی مقدار ہے جس کا حجم اسی وتر خاص کے ایک مکافہ نما کے قطعہ  
 کے حجم کے مساوی ہے جو اس مائع میں تیر رہا ہے۔ اگر اس مکافہ نما کو اٹھایا  
 جائے کہ اس کا راس عین سطح پر ہو اور اگر چھوڑ دینے پر یہ اپنے محور کے  $\frac{1}{2}$  کے  
 مساوی گہرائی تک لوٹنے سے قبل غرق ہو جائے تو ثابت کرو کہ  
 مائع کی کثافت : مکافہ نما کی کثافت :: ۴ : ۳

۱۲ — دئے ہوئے زاویہ راس کا ایک ٹھوس مخروط، ایک ایسے محور پر تھما  
 گیا ہے جس کے گرد یہ حرکت کر سکتا ہے اور جو مخروط کے قاعدہ کے ایک قطر  
 پر منطبق ہوتا ہے۔ اگر محور کو افقی طور پر پکڑا جائے اور اتنا نیچے کیا جائے کہ مخروط  
 کے حجم کا  $\frac{1}{2}$  نیچے دار راس کے ساتھ ایک متجانس مائع میں غرق ہو جائے

توابع اور مخروط کی کٹانوں میں نسبت معلوم کرو جبکہ توازن تبدیلی ہو۔  
 اگر محور کو اتنا نیچے نہ کیا جائے کہ توازن تبدیلی ہو جائے اور پھر مخروط کو  
 خفیف طور پر ہٹا دیا جائے تو صغیرا بہتر از کا وقت معلوم کرو۔  
 ۱۳۔ ایک چمٹا (Oblate) کرہ نمایوری طرح دو سیالوں میں غرق کر دیا  
 گیا ہے۔ نچلے سیال کی کثافت اضافی اور پر کے سیال کی کثافت اضافی کا دو چند ہے۔  
 کرہ نما انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے اور اس کا مرکز سیالوں کی مشترک سطح  
 میں ہے۔

یہ فرض کر کے کہ صغیر ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اولاً انتصابی سمت میں اور ثانیاً  
 اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے افقی خط کے گرد ثابت کرو کہ صغیرا بہتر ازوں  
 کے اوقات علی الترتیب ہوں گے۔

$$۲۲ \sqrt{\frac{۲}{۵}} \text{ اور } ۲۲ \sqrt{\frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۲-۲}} \text{ جہاں } ۲۲ \text{ کو } ۲۲ \text{ سے ضرب دیا جائے}$$

جہاں کوئی ناقص کے نصف محور لہ اور ب ہیں۔

۱۴۔ ایک متجانس کھوس جسم ایک ماٹ میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے  
 جیسے گہرائی کا عرق شدہ تیر رہا ہے۔ اس کا مرکز ثقل گ گہرائی پر ہے۔ ثابت کرو  
 کہ صغیر انتصابی بہتر از کا وقت  $۲۲ \sqrt{\frac{۲}{۵}}$  ہوتا ہے۔

۱۵۔ یکساں موٹائی کا ایک پترا مستساوی اساقین قائم الزاویہ مثلث کی شکل  
 کا ہے۔ اس کا ایک حادہ زاویہ سیال کی سطح کے نیچے ثابت کر دیا گیا ہے اور یہ  
 اس طرح ساکن ہے کہ اس کا وہ ضلع جو عرق نہیں ہے افقی ہے۔ ثابت کرو کہ  
 اس کے اپنے مستوی میں صغیرا بہتر از کا وقت ہوگا

$$۲۲ \sqrt{\frac{۲}{۵}}$$

جہاں ثبات کے ہر متعلق کا طول ل ہے۔

۱۶۔ ایک جسم کی کوئین منحنی  $۵۵۱$  لا  $۳$  کو محور لا کے گرد گھمانے سے

ہوئی ہے۔ یہ جسم تیر رہا ہے اس طور پر کہ اسکے محور کا حصہ ف غرق ہے۔ اگر اس کو بقدر (ن<sup>۵۳</sup> - ۱) ف کے نیچے بٹھا دیا جائے تو ثابت کر دو کہ لوٹنے پر وہ عین نخل آئے گا۔

۱۷ — م کیت کا ایک گردشی جسم مختلف مائعات میں تیر رہا ہے اگر کسی مائع میں انتصابی اہتر از کے وقت ت اور اس مائع کی کثافت ش میں ربط

$$\frac{1}{\text{ش}} = \text{ف} \left( \frac{1}{\text{ت}} - \frac{1}{\text{ش}} \right)$$

پایا جائے جہاں ف ایک دئے ہوئے تفاعل کو تغیر کرتا ہے تو ثابت کر دو کہ جسم کی نصف النهاری تراش کی مسادات ہوگی

$$\frac{2}{\text{ج}} - (1 + \text{م}) = \text{ف} \left( \frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{م}} \right)$$

۱۸ — ایک یکساں فائدہ کی دھار پر عمود وار تراش ہر جگہ متساوی الہاقین مثلث ہے جس کا نصف زاویہ راس مس<sup>۱</sup> ۲۱ اور قاعدہ ب ہے۔ اسکی دھار مائع کی سطح میں ثابت کر دی گئی ہے اور فائدہ اپنے سے دو چند کثافت نوسعی کے مائع میں تیر رہا ہے۔ پھر اس کو راس کے گرد ایک صغیر زاویہ طہ میں نیچے بٹھا دیا گیا ہے ثابت کر دو کہ اپنے ابتدائی محل پر لوٹ آنے کے لئے جو وقت درکار ہوگا وہ تقریباً یہ ہوگا

$$\frac{1}{\text{طہ}} \left\{ \frac{\text{ب}}{\text{ج}} - \left( \frac{1}{\text{م}} \right) \right\}$$

لہ جا (۳) کما تفاعل کو تغیر کرتا ہے۔ مترجم

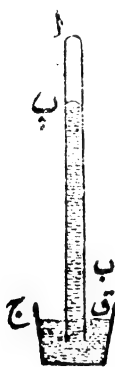
# ماہنامہ

(۱۱۶)

## کرہ ہوائی کا دباؤ

۱۰۹۔ اگر ایک شیشہ کی نلی تقریباً تین فٹ لمبی جس کا ایک سر بند ہو پارے سے بھر دی جائے اور پھر پارہ کے ایک طرف میں اٹا کر اس طرح رکھی جائے کہ اس کا کھلا سر اوپر ہو اور اسے تو یہ معلوم ہو گا کہ نلی کے اندر پارہ کچھ اتر گیا ہے اور اس طرح ساکن ہے کہ اس کی اوپر کی سطح برتن کے پارہ کی سطح کے اوپر تقریباً ۲۹ انچ بلند ہے۔ یہ تجربہ جسکو پہلے ٹورسلی (Torricelli) نے کیا بار پیا کے استعمال کی طرف رہبری کرتا ہے جس سے کہ ہوائی کا دباؤ ناپا جاسکتا ہے۔

بار پیا اپنی سادہ ترین شکل میں ایک سیدھی شیشہ کی نلی ڈب ہے جس میں پارہ ہوتا ہے اور جس کا پچھلا سر پارہ کے ایک چھوٹے حوض میں ڈوبا ہوا رہتا ہے۔ سرابند ہوتا ہے اور بازو ا ب میں ہوا نہیں ہوتی۔



تجربوں سے یہ معلوم ہوا ہے کہ سطح ج کے اوپر پارہ کی سطح ب کا ارتقاع تقریباً ۲۹ انچ ہوتا ہے اور چونکہ سطح ب پر کوئی دباؤ نہیں ہو اس لئے یہ ظاہر ہے کہ ج پر ہوا کا دباؤ وہ قوت ہے جو پارہ کے ستون ب ق کو تھامے ہوئے ہے۔

ہم نے پہلے یہ بتایا ہے کہ ساکن سیال کا دباؤ افقی مستوی پر کے تمام نقطوں

پر وہی ہوتا ہے اس لئے ج پر کا دباؤ ق پر پارہ کے دباؤ کے مساوی ہے۔  
فرض کرو کہ پارہ کی کثافت  $\pi$  ہے اور ج پر کرہ ہوائی کا دباؤ  $\pi$  ہے تب

$$\pi = \text{ج} \times \text{پ} \times \text{ق}$$

اور ارتفاع پ ق سے کرہ ہوائی کے دباؤ کی پیمائش ہوتی ہے۔

پارہ کی کثافت زیادہ ہونے کی وجہ سے یہ سب سے زیادہ موزوں سال  
ہے جو بار پھاؤں کی بناوٹ میں استعمال ہو سکتا ہے حالانکہ کرہ ہوائی کا دباؤ  
کسی قسم کے مانع کے استعمال سے ناپا جا سکتا ہے۔ پارہ کی کثافت پانی کی  
کثافت کا تقریباً  $\frac{1}{800}$  گنا ہے اور اس لئے پانی کے بار پھا میں پانی کے  
ستون کا ارتفاع تقریباً  $\frac{1}{800}$  فٹ ہوگا۔

پارہ کی کثافت پیمائش کے ساتھ بدلتی ہے اور اس لئے نہ لازماً تپش کا  
ایک تفاعل ہے۔

تجربہ سے یہ معلوم کیا گیا ہے کہ ہسٹنٹی گریڈ کے اضافہ کے لئے پارہ کا پھیلاؤ  
اپنے حجم کا  $\frac{1}{550}$  گنا ہوتا ہے پس اگر تپش  $T$  پر کثافت  $\pi$  اور تپش  $T_0$   
پر کثافت  $\pi_0$  ہو تو

$$\pi = \pi_0 \left( 1 + \frac{T - T_0}{550} \right)$$

$$\pi = \pi_0 \left( 1 + \frac{T - T_0}{550} \right) \quad \text{اگر } T = T_0 \text{ تو } \pi = \pi_0$$

$$\text{اور } \pi = \pi_0 \left( 1 + \frac{T - T_0}{550} \right)$$

ضابطہ  $\pi = \pi_0 \left( 1 + \frac{T - T_0}{550} \right)$  (ط ت) ف کی مدد سے کسی مقام پر سکے کرہ ہوائی کے دباؤ  
کی پیمائش ہو سکتی ہے بشرطیکہ عرض بلد کی تبدیلی سے ج کی قیمت میں جو  
تبدیلی واقع ہوتی ہے اس کا لحاظ رکھا جائے۔ نیز یہ دیکھا گیا ہے کہ ایک ہی  
مقام پر خواہ تپش بدلے یا نہ بدلے یہ دباؤ بدلتا ہے اور پھاؤں پر چڑھنے میں  
یا کسی مقام کی ہوائی سے اوپر کسی ذریعہ سے صعود کرنے میں یہ دباؤ گھٹتا ہے۔  
یہ بات سیالات کے توازن کے نظریہ کے مطابق ہے کیونکہ اوپر چڑھنے میں

بار پیا کے اوپر ہوا کے ستون کا ارتفاع گھٹ جاتا ہے اور اس لئے ج پر ہوا کا دباؤ جو اس کے اوپر کی ہوا کے ستون کے وزن کے مساوی ہے گھٹ جاتا ہے اور اس لئے نلی میں پارہ نیچے اترتا ہے۔

اب اگر پارہ کے ارتفاع اور اُس ارتفاع میں جس میں کہ صعود واقع ہوتا ہے ایک ربط معلوم ہو جائے تو ظاہر ہے کہ ایک ہی وقت میں دو مقامات پر بار پیا کے ستونوں کے مشاہدات سے ہم ان مقامات کے ارتفاعوں میں فرق معلوم کر سکتے ہیں۔

اس مقصد کے لئے ہم ایک ضابطہ کی تلاش کریں گے۔ لیکن پہلے ہم ان قوانین کا بیان کر دینا ضروری سمجھتے ہیں جو مختلف تپشوں پر ہوا اور گیسیوں کے دباؤں میں ضبط پیدا کرتے ہیں اور نیز ان قوانین کا جو گیسیوں کے آمیزوں سے متعلق ہیں۔

۱۱۰۔ ہم نے چکدر سیال کے دباؤ، کثافت اور تپش کے درمیان اس رشتہ

$$d = m \cdot t \quad (1 + \alpha t)$$

کو پہلے بیان کیا ہے۔ یہ تجربہ کے دو حسب ذیل نتیجوں سے اخذ کیا گیا ہے۔  
(۱) اگر تپش مستقل رہے تو ہوا کا دباؤ اس کے حجم کے بالعکس بدلتا ہے۔  
(کلیہ بائل)

(۲) اگر دباؤ مستقل رہے تو ہوا کی کسی کثیت کی تپش میں  $\frac{1}{273}$  سنٹی گریڈ کا اضافہ اس میں اتنا پھیلاؤ پیدا کرتا ہے جو اس کے صفر درجہ سنٹی گریڈ پر کے حجم کا  $\frac{1}{273}$  گنا ہوتا ہے۔  
(ڈالٹن اور کے لوک کا کلیہ)

اس طرح اگر ہوا کا دباؤ  $d$  اور کثافت  $t$  ہو جبکہ تپش صفر ہے تو

$$d = m \cdot t$$

اب فرض کر دو کہ تپش کو  $t$  تک بڑھایا جاتا ہے جبکہ دباؤ وہی رہتا ہے۔ اس کو سمجھنے کے لئے فرض کر دو کہ ہوا ایک اسطوانہ میں ہے جس میں ٹھیک بیٹھنے والا قابل حرکت ایک فشارہ لگا ہوا ہے۔ اور اس فشارہ پر ایک مستقل قوت لگی ہوئی ہے



اس طرح ہوا کی پچکدار قوت میں اضافہ فشار کو باہر ڈھکیلنے کا اثر رکھیں گے یہاں تک کہ کثافت کی تخفیف سے اور اس لئے متناظر دباؤ کی تخفیف سے توازن برقرار ہو جائے۔ تب کلیہ دوم سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ث} = (۱ + عت)$$

جہاں  $\text{ث}$  نئی کثافت ہے اور  $ع = ۰.۳۶۶۵$

$$\text{د} = \text{م} \text{ ث} (۱ + عت)$$

اگر تپش پر اسی سیال کا دباؤ  $\text{د}$  اور کثافت  $\text{ث}$  ہو تو

$$\text{د} = \text{م} \text{ ث} (۱ + عت)$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{ث}}{\text{ث}} = \frac{\text{د}}{\text{د}} = \frac{۱ + عت}{۱ + عت}$$

تمام اقسام کی گیسوں کے لئے مقدار ع تقریباً وہی ہوتی ہے، لیکن م کی قیمت مختلف گیسوں کے لئے مختلف ہوگی۔ اس لئے ہر صورت میں تجربہ کی مدد سے اس کو معلوم کرنا چاہیئے۔

۱۱۱۔ تپش مطلق۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ گیس کی تپش کو اتنا گھٹا دیا گیا ہے کہ اس کا دباؤ حجم کی تبدیلی کے بغیر معدوم ہو جاتا ہے تو ہم تپش کے مطلق صفر پر پہنچتے ہیں اور تپش مطلق اس نقطہ سے ناپی جاتی ہے۔

یہ مان کر کہ تپش کو سنتی گریڈ تپش پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے ہمیں مساوات  $۱ + عت = ۰$  سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = - \frac{۱}{ع} = - \frac{۱}{۰.۳۶۶۵}$$

فارن ہائیٹ کے پیمانہ میں مطلق صفر  $-۲۷۳.۱۵$  ہوگا۔

$$\text{مساواتوں} \quad \text{د} = \text{م} \text{ ث} (۱ + عت)$$

$$\text{م} = ۰ \quad \text{ث} = (۱ + عت)$$

سے حاصل ہوتا ہے

ہے ایک دوسرے سے ملا دیا گیا ہے تب آمیزے کا دباؤ وہی د ہوگا اور  
تپش غیر متغیر رہے گی۔ اب اگر آمیزے کو حجم ح میں دبا دیا جائے تو اس کا دباؤ  
کلیہ بائل کے روئے د + د ہوگا۔

یہ نتیجہ صرف یکا گیسوں کے کسی تعداد کے آمیزے پر صادق آتا ہے۔

۱۱۳۔ دو مختلف گیسوں کے حجم ح و ح ہیں اور ان میں سے دباؤ علی الترتیب  
د و د ہیں۔ ان کو ایک دوسرے سے اس طرح ملا دیا گیا ہے کہ ان کے آمیزے  
کا حجم ع ہو جاتا ہے۔ آمیزے کا دباؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

دونوں گیسوں کے دباؤ جبکہ ان کو حجم ع میں محدود کیا جائے علی الترتیب

$$\frac{ح}{ع} د + \frac{ح}{ع} د$$

اور اس لئے دفا مسبق سے آمیزے کا دباؤ

$$\frac{ح}{ع} د + \frac{ح}{ع} د$$

ہے اور اگر یہ دباؤ د سے تعبیر کیا جائے تو

$$د = ع د + ع د$$

لانے کے پختہ اگر گیسوں کی مطلق تپشیں ت اور ت ہوں اور لانے کے بعد  
تپش مطلق ت ہو جائے اور حجم ع تو گیسوں کے دباؤ علی الترتیب ہوں گے

$$\frac{د}{ت} اور \frac{د}{ت}$$

پس آمیزے کا دباؤ د ان دو مقداروں کا حاصل جمع ہوگا اور اس لئے

$$\frac{د}{ت} = \frac{د}{ت} + \frac{د}{ت}$$

گیسوں کے کسی تعداد کے آمیزے کی صورت میں

$$\frac{H}{T} = \frac{P}{T}$$

۱۱۴۔ دفعت ماسبق کے نتیجے اور کھینے بخارات کی صورت میں اُسی طرح صادق آتے ہیں۔ بخارات اور گیسوں کے جیلی خصوصیات میں بلا لحاظ ان کے کیمیائی خصوصیات کے صرف یہ فرق ہے کہ قبل الذکر آسانی کے ساتھ، تپش کی تخفیف سے، مائع میں تبدیل ہو جاتے ہیں اور موخر الذکر کی تکلیف صرف بہت بڑے دباؤ یا انتہائی ٹھنڈک یا دونوں کے ایک ساتھ استعمال سے ہو سکتی ہے

۱۱۵۔ بخار۔ اگر ایسی فضا میں جس میں خشک ہوا ہے پانی داخل کیا جائے تو بھاپ فوراً بن جاتی ہے اور یہ معلوم ہوا ہے کہ بھاپ کی کثافت اور دباؤ صرف تپش پر منحصر ہوتے ہیں اور ہوا کی کثافت پر منحصر نہیں ہوتے۔ پس اگر ہوا کو خلیج بھی کر دیا جائے تو بھاپ کی کثافت اور دباؤ وہی برقرار رہیں گے۔ اگر تپش میں اضافہ کیا جائے یا فضا میں وسعت پیدا کی جائے تو بھاپ کی مزید مقدار تیار ہو جائے گی۔ لیکن اگر تپش کو گھٹا دیا جائے یا فضا کو کم کر دیا جائے تو بھاپ کا کچھ حصہ مکثف ہو جائیگا۔ (۱۲۱)

۱۱۶۔ پروفیسر فیاریٹے نے کاربانک ایسڈ گیس اور دوسری گیسوں کو جن کی تکلیف کے لئے بہت بڑے دباؤ کی ضرورت تھی مکثف کرنے میں کامیابی حاصل کی اور اس کے تجربہ کے نتائج سے یہ خیال پیدا ہوا کہ بہت ممکن ہے کہ تمام گیسیں مائعات کے بخارات ہوں۔ اس کی سہجہ کچھ تائید شدہ میں ہوئی جبکہ ایم۔ پی کٹ ( M. Pictet ) نے اس سال کے اوائل میں ۳۰۰ کردہ ہوائی کے دباؤ کے زیر عمل آکسیجن کو مائع میں تبدیل کیا اور اسی سال کے ماہ دسمبر میں ایم کیلیٹ ( M. Cailletet ) نے نیتروجن اور ہوا کو مائع میں تبدیل کیا۔ ۱۸۸۳ء میں ادب لوسکی ( Wroblewski ) نے ہیڈروجن کو مائع بنایا اور ۱۸۹۹ء میں ڈوار ( Dewar ) نے ٹھوس ہیڈروجن حاصل کی اور اب ہوا اور دوسری مختلف گیسوں کی شکل میں تجارتی اشیاء ہیں۔

فضا میں جب تک پانی کی کافی مقدار باقی رہے جس سے بھاپ بن سکتی ہے فضا بھاپ سے ہمیشہ سیر شدہ ہوگی یعنی فضا میں اتنی بھاپ ہوگی جتنی کہ اس تپش پر اس فضا میں رہ سکتی ہے۔ لیکن اگر تپش کو اتنا بڑا دیا جائے کہ تمام پانی بھاپ بن جائے تو اس تپش اور اس سے اعلیٰ تپشوں کے لئے بھاپ کا دباؤ اسی کلیہ کی پابندی کرے گا جس کلیہ کی ہوا کا دباؤ پابندی کرتا ہے۔

ہر صورت میں خواہ فضا سیر شدہ ہو یا نہ ہو اگر ہوا کا دباؤ د اور بھاپ کا د + ہو تو آمیزے کا دباؤ د + د ہوگا۔

۱۱۶۔ کہ ہوائی میں ہمیشہ آبی بخار موجود ہوتا ہے جس کی مقدار مختلف اوقات پر مختلف ہوتی ہے کبھی کم اور کبھی زیادہ۔ اگر کہ ہوائی کی فضا کا کوئی حصہ بخار سے سیر کر دیا جائے یعنی اگر بخار کی کثافت اس تپش پر جتنی بڑی ہو سکتی ہے اتنی ہو جائے تو تپش کو گھٹانے سے بخار کے کچھ حصہ کی تکلیف ہو جائے گی لیکن اگر اس تپش پر بخار کی کثافت کثافت اعظم نہ ہو تو کوئی تکلیف وقوع پذیر نہ ہوگی جب تک کہ تپش کو اس نقطہ کے نیچے تک نہ گھٹا دیا جائے جس پر فضا میں تکلیف شروع ہو جاتی ہے۔

شبنم کی پیدائش۔ اگر کسی سطح کو جو کہ ہوائی سے تماس رکھتی ہے اتنا سرد کر دیا جائے کہ اس کی تپش اس کے نزدیک کی فضا کے سیر شدہ ہونے کے نقطہ سے نیچے ہو جائے تو آبی بخار کی تکلیف رونما ہوگی اور کثافت بخار سطح پر شبنم کی شکل میں نمودار ہوگا۔ اس لئے زمین پر شبنم کی پیدائش اسکی سطح کے ٹھنڈے ہونے پر منحصر ہے اور یہ عملی طور پر زیادہ سرعت سے اس وقت ہوتا ہے جبکہ آسمان پر بادل نہ ہوں اور اس لئے اشعاع کے ذریعہ حرارت کا مقابلہ زیادہ نقصان ہوتا ہو۔

نقطہ شبنم وہ تپش ہے جس پر شبنم ابتداً پیدا ہونا شروع ہوتی ہے اس کا تعین بالراست امشادے سے کرنا پڑتا ہے۔

(۱۲۲) مختلف تپشوں پر جو بخار کو سیراب کرنے والی کثافتیں ہیں ان کے جواب میں بخار کا دباؤ بھی تجربہ سے معلوم کر لینا چاہیے اور اگر ایسا کیا جائے تو نقطہ شبنم

کے مشاہدے سے کرہ ہوائی میں بخار کا دباؤ فوراً معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ اگر نقطہ منجم  
نقش اور اس کے مشاہدہ دباؤ ہو تو کسی تپش کے پر جو ت کے اوپر ہے  
دباؤ د، مساوات

$$\frac{1 + \text{عد ت}}{\text{عد ت}} = \frac{2}{\text{د}}$$

سے معلوم ہو جائیگا۔

۱۱۷۔ اگس کی تپش اور دباؤ پر پچکاؤ یا بسط کا اثر۔

تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ اگر ہوا کی کسی مقدار کو جو ایک ایسے ظرف  
کے اندر بند ہے جس میں حرارت داخل نہیں ہو سکتی پچکایا جائے تو اس کی  
تپش بڑھ جاتی ہے اور یہ کہ اگر ہوا کی کسی مقدار کو خواہ وہ کسی قسم کے ظرف میں  
بند ہو یکا یک پچکا دیا جائے اس طرح پر کہ حرارت کو باہر نکلنے کا موقع نہ ملے تو اس  
صورت میں بھی تپش اسی طرح بڑھ جاتی ہے۔

۱۱۸۔ استعداد حرارت۔ کسی جسم کی استعداد حرارت، حرارت کی وہ مقدار  
ہے جو اس کی تپش کو ایک درجہ بڑا دینے میں مطلوب ہوتی ہے۔

حرارت کی اکائی جو عملاً استعمال ہوتی ہے حرارت کی وہ مقدار ہے جو پانی  
کی اکائی کمیت کی تپش میں ایک درجہ کا اضافہ پیدا کر دے جبکہ پانی کی تپش  
سنٹی گریڈ اور، ہم سنٹی گریڈ کے درمیان ہو۔

حرارت نوعی۔ کسی جسم کی حرارت نوعی اس کی کمیت کی ایک اکائی کی  
استعداد حرارت ہے یا بالفاظ دیگر حرارت نوعی وہ نسبت ہے جو حرارت کی اس  
مقدار کو جو جسم کی تپش کو ا بڑا دینے میں مطلوب ہوتی ہے حرارت کی اس  
مقدار کے ساتھ ہو جو مساوی وزن کے پانی کی تپش کو ایک درجہ بڑا دینے میں  
درکار ہوتی ہے۔

اگر حرارت کی مقدار فرق کمیت کی ایک اکائی میں فرت تپش کی تبدیلی پیدا  
کر دے تو حرارت نوعی کا ناپ  $\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}}$  ہوگا۔

گیسوں میں دو صورتوں پر غور کرنا ضروری ہے (۱) جبکہ دباؤ مستقل رہے، اور گیس کو پھیلنے دیا جائے (۲) جبکہ حجم مستقل رہے۔  
ان دو صورتوں میں حرارت نوعی کو اتم رموز ج د اور ج ح سے تعبیر کریں گے۔

دیکھ لینا آسان ہے کہ ج د، ج ح سے بڑا ہے کیونکہ پہلی صورت میں حرارت جو گیس کو دی گئی ہے گیس کے پھیلانے میں بھی کام کرتی ہے اور اس کی قبض کے بڑھانے میں بھی۔

۱۱۹۔ حرنا گدز پھیلاؤ۔ گیس کی دی ہوئی مقدار کے پچکاؤ یا بسط کا اثر دریا کرنے میں یہ ظاہر ہے کہ حرارت مطلوبہ ج د اور ت کا تفاعل ہوگی اور چونکہ ج د و ت اس نے کسی پھیلاؤ کے لئے حرارت مطلوبہ ج اور ت کا تفاعل ہوگی۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{فرق} = \frac{\text{ج ح ق}}{\text{ج ح ح}} + \frac{\text{ج ح ق}}{\text{ج ح د}} \text{ فرد}$$

اور بالعموم د = م ت = ت یا اگر گیس کی دی ہوئی مقدار کی کیت کو کیت کی اکائی مانا جائے تو

$$\text{ح د} = \text{م} = \text{ت} = \text{ل ت}$$

اگر دباؤ مستقل ہو تو فرق = ج د فرت

$$\frac{\text{ج ح ق}}{\text{ج ح ح}} = \text{فرق} = \text{ج د فرت} = \frac{\text{ج د}}{\text{ل}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{ج ح ق}}{\text{ج ح ح}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ل}}$$

اگر حجم مستقل ہو تو

$$\frac{\text{ج ح ق}}{\text{ج ح د}} \text{ فرد} = \text{ج ح فرت} = \text{ج ح} \quad \text{ح فرد}$$

$$\frac{\text{جند ح}}{\text{جند د}} = \frac{\text{جند ح}}{\text{جند د}}$$

اس لئے اگر کوئی حرارت نہ پہنچائی جائے یعنی اگر فرق = ۰ تو

$$= \frac{f_2}{2} \mathcal{L} + \frac{f_1}{2} \mathcal{L}$$

۱۰۔ دُعا، حجاج، مستقل ہے

اگر حج کو حج کے ساتھ جو نسبت ہے اُس کو مستقل بائیں۔  
اگر د، ح تغیر پاکر د، ح ہو جائیں تو حاصل ہوگا

$$\therefore \left( \frac{\tau}{\tau} \right) = \frac{5}{5}$$

جہاں ج = ج، ج/ج، اور نیز حاصل ہوگا

$$\frac{1}{2} \left( \frac{2}{2} \right) = \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

مسافات دج = مستقل، حر حرکیات میں حرزا گذر خطوط کی مسافات  
ہے اور یہ گیس کی کسی کمیت کے حجم اور اس کے دباؤ کے درمیانی ربط کو تعبیر  
کرتی ہے جبکہ حجم میں تغیر کے وقت نہ کوئی حرارت ضائع ہو اور نہ پہنچائی جائے۔  
ہوا کی کسی کمیت کے یکایک پھیلاؤ یا پچکاؤ کی صورت میں بھی مسافات  
بالا درست رہتی ہے کیونکہ حرارت کے قابل قدر نقصان یا بیرونی ماحذوں سے حرارت  
کے اکتساب کے لئے کافی وقت نہیں ملتا۔ یہ معلوم ہو گا کہ ربط بالا آواز کے نظریہ  
میں بہت زیادہ اہمیت رکھتا ہے۔

۱۲۰۔ ج۔ ج۔ مستقل۔ اصول توانائی کی مدد سے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ

کسی گیس کے لئے ج، اور ج، کا فرق مستقل ہوتا ہے۔

حور کیا تـ کئے ایک کلیہ کی رو سے کسی نظام میں حرارت کے



استعمال سے جو توانائی داخل کی جاتی ہے وہ حرارت کی مقدار کے متناسب ہوتی ہے۔ پس اگر حرارت کی اکائی کا جیلی معادل غ ہو اور گیس کی اکائی کیت میں حرارت کا اضافہ فرت جبکہ دباؤ مستقل رہے تو توانائی داخل شدہ ہوگی

$$\text{غ} \times \text{ج} = \text{فرت}$$

لیکن یہ توانائی کچھ تو دئے ہوئے حجم پر تپش کے بڑانے میں صرف ہوتی ہے اور کچھ اس حجم کے پھیلانے میں۔

$$\therefore \text{غ} \times \text{ج} + \text{د} \times \text{فرح} = \text{غ} \times \text{ج} + \text{فرت}$$

$$\text{اور} \quad \text{د} \times \text{ح} = \text{ل} \times \text{ت}$$

$$\therefore \text{غ} (\text{ج} - \text{ج}^2) = \text{ل}$$

جس سے ظاہر ہے کہ ج - ج<sup>۲</sup> مستقل ہے۔ ہم اس مساوات سے دفعہ (۱۱۹) کا نتیجہ حاصل کر سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر کوئی حرارت نہ پہنچائی جائے تو کوئی توانائی داخل نہیں ہوگی۔

$$\text{اور} \quad \therefore \text{د} \times \text{فرح} + \text{غ} \times \text{ج} = \text{فرت}$$

$$\text{لیکن} \quad \text{ح} \times \text{د} = \text{ل} \times \text{ت} = \text{غ} (\text{ج} - \text{ج}^2) \times \text{ت}$$

$$\therefore \text{د} \times \text{فرح} + \text{ح} \times \text{فرد} = \text{غ} (\text{ج} - \text{ج}^2) \times \text{فرت}$$

$$\text{اور} \quad \text{د} \times \text{فرح} (\text{ج} - \text{ج}^2) + \text{ج} (\text{د} \times \text{فرح} + \text{ح} \times \text{فرد}) =$$

جس سے ج - ج<sup>۲</sup> د فرح + ج - ج<sup>۲</sup> ح فرد = پہلے کی طرح۔

۱۲۱۔ گیس کے حرانگدر بچکاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کا معلوم کرنا۔ دفعہ ۱۴ میں ہم نے یہ مان لیا تھا کہ تپش مستقل ہے یا بالفاظ دیگر یہ کہ بچکاؤ

ہم پتشی ( Isothermal ) ہے۔

یہ حالت اس طرح پیدا کی جاسکتی ہے کہ عمل اتناست کیا جائے کہ جو حرارت پیدا ہوتی ہے وہ اثنائے عمل میں تلف ہو جائے۔  
اگر پچکاؤ حرنا گذار ہو یعنی عمل کو اس طرح ترتیب دیا جائے کہ کوئی حرارت نہ صنائع جائے اور نہ داخل ہو اور یہ اس صورت میں عملاً ہوتا ہے جبکہ پچکاؤ بہت سرعت سے واقع ہو تو ایسے پچکاؤ کے لئے دفعہ (۱۱۹) سے یہ ربط حاصل ہوتا ہے

$$د ح = مستقل = د$$

جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ حجم ح سے حجم ۶ میں پچکاؤ نے میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$= - کر د فر ح = - کر فر ح - ح فر ح$$

$$= \frac{۵}{۱-۵} (ح - ۱ - ۶ - ح)$$

زمین کے کرہ ہوائی کی کل کمیت

۱۲۲۔ زمین کے گرد ہوا اور بخار کی کمیت کا کچھ اندازہ بار پیمائی رو سے لگایا جاسکتا ہے۔ یہ مانکر کہ زمین نصف قطر کا ایک کرہ ہے اور اس کی سطح کے تمام نقطوں پر بار پیمائی ستون کا ارتفاع وہی ف ہے کہ ہوائی کی کمیت تقریباً پارہ کی کمیت ہم ۳۳ ش ر ف کے مساوی ہے۔

فرض کر دو کہ زمین کی اوسط کثافت دشا ہے  
تب کرہ ہوائی کی کمیت : زمین کی کمیت

$$= ۳۳ ش ر ف = ۳۳ ش دشا ر$$

$$= ۳۳ ش ف : دشا ر$$

لیکن پانی کی میاری شے لینے سے ش = ۱۳۰۵۵ اور دشا تقریباً ۵۵ کے مساوی معلوم کیا گیا ہے۔ اور اگر ف کی تقریبی قیمت ۲۹۰۹ انچ

لی جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ کمیتوں کی یہ نسبت اُس نسبت سے کسی قدر کم ہے جو ایک نو دس لاکھ کے ساتھ ملے ہے۔

### متجانس کرہ ہوائی کی بلندی

۱۴۳۔ اگر ہوا کے پورے ستون کی ہر جگہ وہی کثافت ہوتی جو زمین کی سطح پر ہے تو اس کے ارتفاع کو لی اور پارہ کے ارتفاع کو ف سے تعمیر کرنے سے حاصل ہوگا

$$F = \frac{F}{\rho}$$

جہاں  $F$  ہوا کی کثافت ہے۔ یہ معلوم کیا گیا ہے کہ نسبت  $F : \rho$  تقریباً ۱۰۴ : ۱ ہے اور اس لئے گزشتہ کی طرح  $F$  کی قیمت ۱۴۹ و ۹ استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ لی ۵ میل سے کسی قدر کم ہے۔

### کرہ ہوائی کے ارتفاع کی ضروری حد

ظاہر ہے کہ زمین کی سطح سے کچھ فاصلہ پر اس کی کشش گھٹ جاتی ہے اور اس لئے ہوا کی کثافت اور دباؤ گھٹ جاتے ہیں اس طرح نتیجہ بالا حقیقت سے بہت بعید ہے۔ ہر کیف ارتفاع کی حد اس بات کو پیش نظر رکھ کر معلوم کیجا سکتی ہے کہ زمین کے

(۱۲۶)

۱۵۔ تجزیہ کی بنیاد پر زمین کی اوسط کثافت محسوب کرنے کا سوال اکثر

زیر بحث رہا ہے۔ جے۔ ایچ۔ پوائنٹنگ کے مضمون Adam's Prize Essay 1893

میں زمین کی اوسط کثافت کی قیمت ۳۳۹۴ و ۵ حاصل کی گئی ہے۔ سی۔ وی۔ ہائینز

(Phil Trans. 1895) میں اور سی۔ بران (C. Braun)

Denkschrift d. Math. natur Klasse d. Wiener Akad, 1895

میں اس کو ۵۵۲۴ بتاتے ہیں۔ نیز دیکھو جے۔ ایچ۔ پوائنٹنگ کا مضمون

Gravitation constant and mean density of the Earth, Encycl. Brit, eleventh edition.

مرکز سے ایک خاص فاصلے پر اس کی کشش ہوا کے ذروں کو دائری مداروں میں رکھنے کے  
نا قابل ہوگی۔ لیکن ذروں کا ان مداروں کو فرسٹ کرنا ضروری ہے تاکہ اضافی توازن  
کی حالت قائم رہ سکے۔

خط استوا پر ہر جگہ سڈا،  $\frac{ج}{۲۸۹}$  کے مساوی ہے جہاں سہ زمین کی ثوابی  
رفتار ہے اور اس لئے  $ی$  ارتفاع پر وہ قوت جو ہوا کے ذرہ کیت ک کو  
اپنے دائری حرکت میں رکھنے کے لئے درکار ہو ک  $ج(ر + ی)$   $۲۸۹/ر$  کے  
مساوی ہوگی۔ اسی ارتفاع پر زمین کی کشش

$$\frac{ک ج ر^۲}{۲(ی + ر)} =$$

اور اس لئے استہائی ارتفاع مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

$$\frac{ی + ر}{۲۸۹} = \frac{ر^۲}{۲(ی + ر)}$$

$$یا \quad ی = ر \left\{ ۱ - \frac{۲}{۲۸۹} \right\}$$

یعنی  $ی$ ،  $ر$  سے کس قدر بڑا ہے۔

ممکن ہے کہ یہ ارتفاع اصلی ارتفاع سے بہت زیادہ ہو کیونکہ غباروں میں  
تجربات کی بنا پر معلوم ہوا ہے کہ اوپر چڑھتے وقت ہوا کی تپش بہت زیادہ سرعت  
کے ساتھ گھٹتی جاتی ہے اور اس لئے یہ بالکل ممکن ہے کہ  $ر$  سے کم ارتفاع  
پر ہوا بجد سردی کی وجہ سے مارچ میں تبدیل ہو گئی ہو اور اس لئے اسکی بیرونی سطح  
ایسی صورت میں اُسی قسم کی ہوگی جس قسم کی غیر چمکدار سیالوں کی سطحیں ہوا کرتی ہیں۔

بار پیمائے کے ذریعہ ارتفاعوں کا معلوم کرنا

۱۲۳ — بار پیمائے کے سیلابی ستون کے ارتفاع اور سطح سمندر کے اوپر اس آئہ کے  
ارتفاع کے درمیان ربط قائم کرتے وقت ہمیں کرہ ہوائی کی تپش کے متعلق ایک  
مفروضہ قائم کر لینا چاہیئے۔

اول فرض کر دو کہ تپش مستقل ہے اور  $y$  ارتفاع پر دباؤ اور کثافت  $d$ ،  $z$  سے تعبیر ہوتے ہیں اور  $x$  ارتفاع پر ان کی قیمتیں  $d$ ،  $z$  ہیں۔ تب توازن کی مساواتیں ہوں گی

$$\text{فرد} = - \text{ج} \text{ ش فری}$$

$$\text{اور} \quad \frac{z}{\text{ش}} = \frac{d}{\text{ج}} = \text{م}$$

$$\text{م لوک د} = \text{مر} - \text{ج ی}$$

$$\text{لوک} \frac{d}{z} = \frac{\text{ج}}{\text{م}} (\text{ی} - \text{ی})$$

(۱۲۷) نیز اگر  $z$ ،  $d$  سے دو مقامات پر کے بار پیاؤں کے ارتفاع تعبیر ہوں اور ان مقامات کے ارتفاع  $y$  اور  $x$  ہوں تو

$$\text{ی} - \text{ی} = \frac{\text{م}}{\text{ج}} \text{ لوک} \frac{d}{z} = \frac{\text{م}}{\text{ج}} \text{ لوک} \frac{\text{ش}}{\text{ف}} \dots (۱)$$

اگر تپش مستقل نہ ہو تو فرض کر دو کہ ان دو مقامات پر تپش  $d$ ،  $z$  ہیں۔ اب اگر ان دو مقامات کی بلندیوں کے درمیان، اوسط یکساں تپش  $\frac{d+z}{2}$  کا مفروضہ اختیار کیا جائے تو  $d$  اور  $z$  میں ربط  $d = \text{م ش} \times (۱ + \text{ع} ت)$  حاصل ہوگا اور مساوات (۱) ہو جائیگی

$$\text{ی} - \text{ی} = \frac{\text{م}}{\text{ج}} \left\{ ۱ + \frac{۱}{۲} \text{ع} (ت + \text{ت}) \right\} \text{ لوک} \frac{\text{ش}}{\text{ف}} \dots (۲)$$

اور اگر دونوں مقامات پر بار پیاؤں کے اندرونی پارہ کی تپشوں کے فرق کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو دفعہ (۱۰۹) سے

$$\frac{d}{z} = \frac{\text{ف} (۱ - \text{ط} ت)}{\text{ف} (۱ - \text{ط} ت)} ، \quad \text{جہاں} \text{ط} = ۱۸.۱۸ \dots$$

اور مساوات (۲) ہو جائیگی

$$\text{جی۔ سی} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ (تہ + تہ)}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ (تہ + تہ)}} \quad (۳) \dots$$

۱۲۵۔ لیکن اگر سطح زمین کے اوپر ارتفاع کافی زیادہ ہوں تو یہ ضروری ہے کہ زمین کے مرکز سے مختلف فاصلوں پر جاذبہ ارض کے تغیر کو بھی ملحوظ رکھا جائے۔ اس لئے ہم زیادہ صحیح ضابطہ کی تلاش کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ سطح بحر پر جاذبہ ارض کا ناپ ج ہے اور زمین کا نصف قطر ہے تو ارتفاع جی پر جاذبہ قوت

$$\frac{J}{r^2}$$

سے پائی جائیگی۔ اور توازن کی مساوات ہوگی

$$\text{فرد} = - \frac{J}{r^2} \quad \text{ج (ر + سی) ث فری}$$

نیز ہم جانتے ہیں کہ  $d = m \text{ ث (ا + ع ت)}$  اور یہاں یہ دیکھ لیتا ضروری ہے کہ  $d$  درحقیقت ہوا کے دباؤ اور آبی بخار (جو ہوا میں شامل ہے) کے دباؤ کا مجموعہ ہے۔

پس اگر آبی بخار کی کثافت  $\theta$  ہو تو ذیل کی شکل کی دو مقداروں کا مجموعہ ہوگا

$$m \text{ ث (ا + ع ت)} + m \text{ ث (ا + ع ت)}$$

اور اس لئے مساوات بالا میں مقدار  $m \text{ ث}$  درحقیقت دو مقداروں  $m \text{ ث}$ ، (۱۲۸)

$m \text{ ث}$  کا مجموعہ ہے جو علی الترتیب ہوا اور آبی بخار کے جواب میں ہیں۔

اوپر کی دو مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{فرد} = - \frac{1}{d} \frac{J}{r^2} \quad \text{ج (ر + سی) ث فری}$$

لے پوری صحت کے لحاظ سے یہ بہتر ہوگا کہ  $m \text{ ث}$  کی بجائے  $m \text{ ث}$  لکھا جائے جہاں  $\theta$  خالص ہوا کی کثافت ہے۔

اور گذشتہ کی طرح ہم ت کو مستقل اور ان دو مقامات پر کی پیشوں کے  
اوسط کے مساوی مانیں گے۔  
یکمیل سے

$$م \text{ لوک } د = \frac{1}{1 + عت} \frac{ج}{ر + ی} + م$$

اور  $م \text{ لوک } د = \frac{ج}{د} = \frac{ج}{(1 - عت)(ر + ی)(ی - م)}$  ..... (۱)  
فرض کرو کہ گذشتہ کی طرح بارہ کے مشاہدہ کردہ ارتفاع فٹ افٹ اور پیشیں  
تہا تہا ہیں۔ تب چونکہ ی ارتفاع پر جاذبہ ارض کی قوت مقدار  $\frac{ج}{(ر + ی)^2}$   
سے ناپی جاتی ہے اسلئے

$$د = \frac{ج}{(ر + ی)^2} \text{ فٹ } (1 - ط تہ)$$

$$د = \frac{ج}{(ر + ی)^2} \text{ فٹ } (1 - ط تہ)$$

$$د = \frac{ج}{(ر + ی)^2} \frac{ط تہ - 1}{ط تہ - 1} \text{ ..... (۲)}$$

اب چونکہ ط ایک بہت چھوٹی مقدار ہے اسلئے

$$ی - ی = م(1 + عت)(ر + ی)(ی - م) \left\{ \text{لوک } د + \frac{ج}{(ر + ی)^2} \right\} - م \text{ لوک } د - م \frac{ج}{(ر + ی)^2} \text{ ..... (۳)}$$

جہاں  $م = \text{لوک } نو = ۲۹۲۵۳۳۶$   
اس ضابطہ سے اگر ی معلوم ہو تو ی کی قیمت محسوب کیجا سکتی ہے۔ اگر مثلاً  
مقام سطح بحر کے قریب واقع ہو تو ی = ۰ اور

$$ی - ی = م(1 + عت) \left( \frac{ج}{ر + ی} \right) + م \text{ لوک } د - م \frac{ج}{(ر + ی)^2} \text{ ..... (۳)}$$

۱۲۶۔ گورنمنٹ تحقیقات میں ہم نے سطح زمین کے مختلف حصوں پر جاذبہ ارض کے تغیر کا کوئی لحاظ نہیں کیا ہے۔ زمین کی کرہ نمائی شکل اور اپنے محور کے گرد اس کی گردش کی وجہ سے جاذبہ ارض کی قوت کی قیمت مختلف عرض بلد پر مختلف ہوتی ہے اور زمین کے پھٹنے کی ساخت کے باعث زمین اور سمندر پر اس کی قیمت مختلف ہوتی ہے اور نیز یہ معلوم کیا گیا ہے کہ بحری چھوٹے جزیروں پر براعظموں کی بہ نسبت اس کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ (۱۲۹)

ج کی اوسط قیمت کے لئے ایک جدید ضابطہ

$$ج = ۹۸۸۵.۴۶ + (۳۰۲.۵۵ \times جب^۲ - ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰ \times جب^۴) / سم^۳$$

یا  $ج = ۹۸۰۵.۶۲۲ + (۱ - ۰.۲۶۴۴ \times جب^۲ + ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰ \times جب^۴) / سم^۳$   
 حاصل ہوا ہے جہاں  $ج$  عرض بلد ہے اور خط استوا اور عرض بلد  $۴۵^\circ$  پر  $ج$  کی قیمتیں بالترتیب  $۹۸۰۵.۶۲۲$  اور  $۹۸۰۵.۶۳۳$  ہیں۔  
 اگر ہم  $ج = ۹۸۰۵.۶ + (۱ - ۰.۲۶۴۴ \times جب^۲) / سم^۳$  لیں تو  $ی$  کے لئے جو آخری جملہ ہم نے حاصل کیا ہے وہ ہو جائیگا

$$ی = \frac{م (۱ + عت) (۱ + ی/ر)}{۹۸۰۵.۶ + (۱ - ۰.۲۶۴۴ \times جب^۲) / سم^۳ + ۲ \times لوک (۱ + ی/ر)}$$

- شرط (۲ - ۲) { ..... (۳)  
 ان منابطوں میں جیسا کہ ہم نے اوپر دیکھا ہے  $م$  کی قیمت ہوا کے آبی بخار کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے لیکن اگر ہوا کو خشک فرض کیا جائے تو ضابطہ ہوگا  
 $د = م (۱ + عت)$  اب اگر ہوا سستی گریڈ پیش پر ہو اور اس کا دباؤ  $۷۶۰$  ملی میٹر پارہ کے مساوی ہو تو  $م = د = ۷۶۰$  ج ۲،



جہان ڈ پارہ کی کثافت ہے۔

اور ڈ/ث = ۱۰۴۶۲ لینے سے

$$م = ۱۰۴۶۲ \times ۷۹۰ = ۸۲۳۶ ج ملی میٹر$$

$$= ۷۹۵۱۵۱۲ ج میٹر$$

اس سے سر/م = ۹۸۰.۵۶ = ۱۸۳۰۸ میٹر ہو جائے گا۔ لیکن اس میں آبی بخار کو بالکل نظر انداز کر دیا گیا ہے اور م کی ایسی قیمت جو مشاہدہ کردہ حقایق کے زیادہ مطابق نتیجہ پیدا کرتی ہے ۷۹۶۳۵۲ ج ہے جس سے حاصل ہوگا

$$\frac{م}{۹۸۰.۵۶} = ۱۸۳۳۶ میٹر$$

ضابطہ (۴) سے ہی معلوم کرنے کیلئے اول اس کی تقریبی قیمت مساوات

کے بائیں جانب میں  $\frac{م}{۹۸۰.۵۶}$  کو نظر انداز کر کے معلوم کرنی چاہیئے۔ پھر اگر اس تقریبی

قیمت کو اس مساوات کے بائیں جانب میں استعمال کیا جائے تو ہی کی زیادہ صحیح قیمت حاصل ہوگی۔ اس عمل کو بشرط ضرورت پھر دہرایا جاسکتا ہے۔

۱۲۷۔ دوسری تصحیحات بھی ضروری ہیں جب کہ عملی طور پر بار پیمائے کے

ذریعہ ارتفاعوں کا ٹھیک ٹھیک معلوم کرنا مطلوب ہو۔ مثلاً م کی قیمت

اس وجہ سے بھی بدل جاتی ہے کہ دی ہوئی تپش اور دباؤ پر آبی بخار کی کثافت

خشک ہوا کی کثافت سے جو انہی حالات کے زیر اثر ہو کم ہوا کرتی ہے اور

آبی بخار کا تناسب خشک ہوا کے ساتھ دو مقامات پر مختلف ہو سکتا ہے۔ (۱۳۰) اور بالعموم مختلف ہوتا ہے۔

علامہ بریں اگر اوپر والا مقام زمین کی سطح مرتفع کے کسی حصہ پر ہو تو زمین

کے اُس حصہ کی کشش کو بھی محسوب کرنا چاہیئے جو اس کی اوسط سطح کے اوپر

ہے۔ اس کشش کا اثر یہ ہوگا کہ مقدار ج را/ (ر + ی) میں بتدریج

۳ ج ی / ۴ ر کے اضافہ ہو جائے گا۔ اس طرح ی ارتقاع پر جاذب کی قوت  
کناپ

$$\frac{3J}{4R} + \frac{2J}{2(R+Y)}$$

(Routh, Analytical  
Statics II P. 12)

ہوگا۔ یا تقریباً  $\left\{ \frac{5Y}{4R} - 1 \right\} J$

اس صورت میں د کے لئے مساوات حاصل ہوگی

$$Q = - \left\{ \frac{5Y}{4R} - 1 \right\} J$$

اور اس لئے اگر نچلا مقام سطح بحر پر ہو تو

$$M(1+e) \text{ لوک } \frac{Q}{r} = J \left( \frac{5Y}{4R} - 1 \right)$$

$$J = \frac{M(1+e)}{J} \left( \frac{5Y}{4R} + 1 \right) \text{ لوک } \frac{Q}{r}$$

دفعہ (۱۲۵) کی مساوات (۲) کی بجائے ہمیں مساوات

$$\frac{Q}{r} = \left( \frac{5Y}{4R} + 1 \right) \left( \frac{1 - \text{طہ تہ فت}}{1 - \text{طہ تہ فت}} \right)$$

حاصل ہوگی۔ اور ی کے حاصل کرنے کے لئے آخری مساوات دفعہ (۱۲۶)

کی مساوات (۴) میں  $1 + \frac{Y}{R}$  کی بجائے  $1 + \frac{5Y}{4R}$  درج کرنے سے

حاصل ہوگی۔ یہ معلوم رہے کہ لوک  $\left( \frac{5Y}{4R} + 1 \right)$  تقریباً ۲ لوک  $\left( \frac{5Y}{4R} + 1 \right)$  کے مساوی ہے۔

یہ قابل توجہ ہے کہ اگر ی اور ر کو میٹر میں ناپا جائے تو  $\frac{Y}{R}$

$$= 154 \dots \dots \dots 5 \text{ ی تقریباً}$$

اس طرح بحال کو نظر انداز کرنے سے جو غلطی واقع ہوگی وہ عام طور پر چھوٹی ہوگی۔

خیال کیا جاتا ہے کہ اس قسم کا ضابطہ سب سے پہلے لاپلاس نے بیان کیا ہے۔  
۱۲۸۔ یہ بھی معلوم رہے کہ بار پیمائے اندر کے پارہ کی تپش کو ہم نے وہی مانا ہے جو اس کے گرد کی ہوا کی ہے۔ لیکن بعض صورتوں میں مثلاً جبکہ ہوائی جہاز میں مشاہدات لئے جائیں تو یہ ممکن ہے کہ بار پیمائے ایک ہی مقام پر اتنے عرصہ تک نہ رہے کہ اس کی تپش اس کے گرد کی ہوا کی تپش کے مساوی ہو جائے۔ پارہ کی تپش بہر حال تپش پیمائے کے ذریعہ دریافت ہو سکتی ہے جب اس کے چوغہ کو بار پیمائے کے حوض میں رکھا جائے۔ اس طرح سے پارہ کی جو تپشیں حاصل ہوگی انکو وضع (۱۲۵) کی مسادات (۲) میں استعمال کرنا ہوگا۔

۱۲۸۔ ۱۔ حملی توازن۔ متبادل مفروضہ تپش کے حملی توازن کا ہے۔  
لارڈ کیلون نے اس کو اس طرح بیان کیا ہے ”جب سیال کے تمام حصے آپس میں آزادانہ تبادلہ کرتے ہوں اور اشعاع و ایصال کا اثر قابل قدر نہ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ سیال کی تپش حملی توازن کی حالت میں ہے“ اس حالت میں یہ بات مستنبط ہوتی ہے کہ اگر مختلف ہموار سطحوں پر کی ہوا کی مساوی کمیتوں کو حرارت کے کسب

۱۲۹۔ Mekanique Celeste, Livre X, Ch. IV — لاپلاس کا ضابطہ جو وضع (۱۲۶)

کے ضابطہ (۲) میں صرف عددی سرور میں اختلاف رکھتا ہے اس موضوع کے متعلق اساسی ضابطہ قرار دیا جاتا ہے۔ سر جان مور کی کتاب

Meteorology, 1910

کے صفحہ ۱۴۹ میں اسکو درج کیا گیا ہے بار پیمائی تصحیحات کے استعمالی ضابطہ کے لئے طبعیات کی کسی جدید کتاب کا مطالعہ کرو مثلاً (Chwolson) کی کتاب

(Lehrbuch der Physik, 1902) جلد ۳ صفحہ ۳۳۴ اور جداول عددی

کے لئے دیکھو (Observer's Handbook) جسکو (Metrological)

Office نے ۱۹۰۸ میں شائع کیا۔

Collected papers V. III P. 255

یازبان کے بغیر آپس میں تبدیل کروایا جائے تو وہ صرف دباؤ کثافت اور تپش کا تبادلہ کریں گے اور بحیثیت مجموعی کوئی تبدیلی نہ ہوگی۔ اس لئے اس صورت میں مذکورہ بالا مساواتیں ہو جائیں گی

$$\text{فرد} = - \text{ج ث فری} \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{جہاں} \quad \text{د} = \text{م ث ج اور د} = \text{ل ث ت} \\ \text{میا ارتفاع پر مطلق تپش کو ت تعبیر کرتا ہے۔}$$

$$\text{م جہ ث ج} = \text{فرث} = - \text{ج فری}$$

$$\text{اور تکمل سے} \quad \frac{\text{م جہ}}{\text{جہ} - ۱} \text{ ث ج} = \text{م} - \text{ج ی}$$

$$\text{جہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ل}} = \text{م} - \text{ج ی}$$

$$\text{جہ} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}} = \text{ل} (\text{ت} - \text{ت}) = - \text{ج ی}$$

جہاں سطح بحر پر مطلق تپش کو ت تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{ت} = \frac{\text{ت}}{\text{ل}} = ۱ - \frac{\text{جہ} - ۱}{\text{جہ}} \times \frac{\text{ج ی}}{\text{ل ت}}$$

اور اگر متجانس کرہ کا ارتفاع  $h$  ہو تو

$$\text{ل ث ت} = \text{ت} = \text{ج ث جہ}$$

$$\text{ت} = \frac{\text{ت}}{\text{ل}} = ۱ - \frac{\text{جہ} - ۱}{\text{جہ}} \times \frac{\text{ج ی}}{h} \dots\dots\dots (۲)$$

اگر مساوات (۱) میں  $ج$  کی بجائے  $ج ر$  /  $(ر + ی)$  رکھا جائے تو گوشہ کی طرح تکمل اور اندراج سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ت} = \frac{\text{ت}}{\text{ل}} = ۱ - \frac{\text{جہ} - ۱}{\text{جہ}} \times \frac{ری}{(ر + ی) h} \dots\dots\dots (۳)$$

(۱۳۳)

۱۲۹۔ ذیل کی دو مثالوں سے باب ہذا کے اصولوں کی توضیح ہوتی ہے۔  
 (۱) ایک بے وزن فشارہ ایک انتصابی اسطوانہ میں ٹھیک بیٹھتا ہے۔ اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور اس میں ہوا بھری ہوئی ہے۔ فشارہ ابتداً اسطوانہ کی چوٹی یا سرے پر ہے۔ اگر فشارہ کے سرے پر آہستہ آہستہ پانی ڈالا جائے تو معلوم کرو کہ باہر بہہ جانے کے پیشتر کتنا پانی ڈالا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ کا ارتفاع  $h$  ہے اور فشارہ جس گہرائی تک نیچے جاتا ہے وہ  $y$  ہے۔ تب توازن کے محل میں اسطوانہ کی اندرونی ہوا کا دباؤ  $\pi + \rho g y$  ہوگا۔ جہاں کہ ہوائی کا دباؤ  $\pi$  اور پانی کی کثافت  $\rho$  ہے۔ لیکن، یہ دباؤ  $\pi = \rho h$  ہے۔

$$\pi + \rho g y = \rho h$$

فرض کرو کہ آبی بار بیا کا ارتفاع  $g$  ہے۔

$$\pi = \rho g$$

$$g = h - y$$

اور  $y = 0$ ، یا  $g = h$

اس لئے جب تک کہ اسطوانہ کا ارتفاع  $g$  سے بڑا نہ ہو پانی داخل نہیں کیا جاسکتا۔ کیونکہ بالفرض اگر فشارہ کو نیچے دبا کر بھی اس پر پانی ڈالا جائے تو نیچے کی ہوا کا دباؤ فشارہ کو اٹھا دیگا۔

منفی حل کو، جبکہ  $g > h$ ، یوں خیال کیا جاسکتا ہے کہ یہ ایک مختلف سوال کا حل ہے جس سے یہی جبری مساوات قائم ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ فشارہ کے اوپر بڑھایا گیا ہے اور فشارہ کو ایک ایسی قوت سے بقدری  $F$  صلا کے اوپر اٹھانا مقصود ہے جو اس پانی کے وزن کے مساوی ہے جو اس اسطوانہ میں  $y$  ارتفاع تک بھرا جاسکتا ہے۔ اس سے مساوات پیدا ہوتی ہے

$$\frac{1}{1+Y} = \frac{\pi - \text{ج ث ی}}{\pi}$$

ی = گ - ۱

(۲) ایک غبارہ کی حرکت معلوم کرنا مطلوب ہے یہ فرض کر کے کہ کسی محل میں اس کی ہٹائی ہوئی ہوا کی کیت متجانس ہے اور اثنائے حرکت میں تپش مستقل رہتی ہے۔

فرض کرو کہ غبارہ کی کیت کے مرکز کا ارتفاع ی اور اس کی کیت ک ہے۔ اس کا حجم ج اور ی ارتفاع پر ہوا کی کثافت ثا ہے۔ تب وہ مساوات جس سے حرکت کا تعین ہوتا ہے یہ ہوگی

$$\text{ک} = \frac{\text{فری}}{2} = \frac{\text{ج ث ی}}{\text{ج ث ح} - \text{ک ج}}$$

$$\text{جہاں} \quad \text{ج} = \frac{r}{2(1+Y)}$$

لیکن مساوات فرد = ج ث فری اور د = م ث سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ج ری}}{\pi \text{ و } \pi = \text{م} (1+Y)}$$

اور اس لئے

$$\text{ک} = \frac{\text{فری}}{2} = \frac{\pi \text{ ح ج ر}}{\text{م} (1+Y)} - \frac{\text{ج ری}}{\text{م} (1+Y)} - \text{ک ج} = \frac{r}{2(1+Y)}$$

(۱۳۲) جس میں ک = ث ح رکھنے سے اور ۲ فری سے ضرب دیکر تکمیل کرنے سے

$$\text{ث} \left( \frac{\text{فری}}{2} \right) = \text{ب} - \pi \text{ و } \frac{\pi \text{ ح ج ر}}{\text{م} (1+Y)} + \frac{\text{ج ری}}{\text{م} (1+Y)} + \text{ث ج ر}$$

ابتدائی شرائط سے ۰ = ب - ۲ - ۲ + ۲ + ۲ ج ر

$$\therefore \text{ث} \left( \frac{\text{فری}}{2} \right) = \pi \text{ و } \left\{ 1 - \frac{\pi \text{ ح ج ر}}{\text{م} (1+Y)} \right\} - \frac{\text{ج ری}}{\text{م} (1+Y)} - \text{ث ج ر}$$

غبارہ کا زیادہ سے زیادہ ارتفاع

$$\frac{\text{فری}}{\text{وقت}} = 0$$

رکھنے سے حاصل ہوگا۔ اور اگر غبارہ کی اوسط کثافت اور ہوا کی اوسط کثافت میں بہت تھوڑا فرق ہو تو یہی چھوٹا ہوگا اور ایک تقریبی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے

### امثلہ

(۱)۔ اگر ہوا کی کثافت اضافی ۰.۰۱۳ گرام اور بارہ کی ۵۹ و ۱۳۵ ہو اور اگر بار پیم کا ارتفاع ۳۰ انچ ہو تو ثابت کرو کہ مستقل کم کی قیمت تقریباً ۸۳۶۳۰۰ ہوگی جبکہ طول اور وقت کی اکائیاں فٹ اور ثانیہ ہیں۔

(۲)۔ ۵ و ۱۵ سنتی گریڈ پر خشک ہوا کے ایک لیٹر کا وزن ۲۳ گرام ہے جبکہ بار پیم کا ارتفاع ۶۰ ملی میٹر ہے۔ اس تپش پر آبی بخار کا دباؤ بارہ کے ۱۲.۶ ملی میٹر ستون کے مساوی ہے اور اس کی کثافت کو اسی تپش اور دباؤ پر کی خشک ہوا کی کثافت کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ۵ کو ۸ کے ساتھ ہے۔ ایک لیٹر ہوا کا وزن معلوم کرو جب اس کو مذکورہ بالا تپش اور دباؤ پر آبی بخار سے سیر شدہ کر دیا جائے۔

(۳)۔ ایک ناقص بار پیم کے ارتفاع ۲۹.۲ اور ۳۰ انچ ہیں جبکہ صحیح آلہ کے ارتفاع ۲۹.۴ اور ۳۰.۵ ہوتے ہیں۔ ناقص بار پیم کی ملی کا وہ طول معلوم کرو جس کو اس کے اندر کی ہوا ۳۰ انچ دباؤ کے زیر اثر پُر کر دے گی۔

(۴)۔ کرہ ہوائی کی ایک کعب گز ہوا کو ایک ظرف میں جبکہ حجم ایک کعب فٹ ہے پکایا گیا ہے۔ بار پیم کا ارتفاع ۳۰ ہے۔ جمع شدہ توانائی کا عددی ناپ تقریباً معلوم کرو جبکہ بارہ کی کثافت اضافی بلحاظ پانی کے ۱۳۵.۵۹۶ ہے اور پانی کے ایک کعب ۷.۴۷ گزین ہے۔

(۵)۔ ایک بالکل صحیح سیلابی بار پیم کے ارتفاع ۷۵ اور ۷۶ ہیں جبکہ

ایک ناقص بار پیمائے کے متناظر ارتفاع جس میں کچھ ہوا ہے اور ب ہیں —  
ثابت کرو کہ اگر ناقص بار پیمائے کا ارتفاع ج ہو تو

$$(ع - ا) (ب - ا) (ب - ب)$$

$$(ا - ج) (ع - ا) - (ب - ج) (ب - ب)$$

کی صحت درکار ہوگی۔

(۶) — اگر تپش پیمائے ایک مانع میں جس کی تپش معلوم کرنا مطلوب ہے جزؤ ڈوبو دیا جائے اور اس سے تپش ت کا اظہار ہو جبکہ ہوا کی تپش ت ہو اور تپش پیمائے کا غیر خرق شدہ حصہ م درجے ہو تو ثابت کرو کہ

$$م (ت - ت)$$

$$۶۸۴ + ت - م$$

کی صحت درکار ہوگی اگر تپش پیمائے کے اندرونی پارہ کا پھیلاؤ حرارت کے ۹ کے لئے ہو۔ فرض کر لیا گیا ہے کہ ہر حصہ میں پارہ کی تپش اس حصہ کو گھیرنے والی شے کی تپش کے مساوی ہے۔

(۷) ایک بند انتصالی اسطوانہ کے اندر جبکی تراش کا رقبہ ایک ہے و وزن کا ایک فنثارہ ہے۔ ابتداً فنثارہ اسطوانہ کے وسط میں ہے اور اس کے نیچے اور اوپر کی فصائیں خالی ہوا سے بھری ہوئی ہے۔ اگر فنثارہ کو اپنے حال پر چھوڑ دیا جائے تو وہ ابتدائی ارتفاع کا نصف نیچے اتر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سیر شدہ بخار کا تناؤ ۳ - ۴ ہوگا جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ ۳۳ ہے۔ اس عمل کے ابتدا اور اختتام پر تپش وہی فرض کر لی گئی ہے۔

(۸) انتصالی بار پیمائی نلی بنائی گئی ہے جس کے اوپر کا حصہ سرے پر بند کر دیا گیا ہے۔ اس حصہ کی تراش کا رقبہ ۱ ہے۔ بار پیمائی درمیانی حصہ ایک جو نہ ہے جس کا حجم ۲ ہے۔ بار پیمائی کے نچلے حصہ کی تراش کا رقبہ ج ہے اور اس کا پینڈا کھلا ہوا ہے۔ جو ذوق پارہ سے بھرا ہوا ہے لیکن نلی کے نچلے اور اوپر کے حصوں میں پارہ جزؤ بھرا ہوا ہے۔ پارہ کو نیچے سے باہر نلی پڑنے سے ایک قسمی کے ذریعہ روکا گیا ہے جو آزادانہ نیچے



اوپر حرکت کر سکتی ہے اور جس پر ہوا کا دباؤ عمل کرتا ہے۔ نلی کے بالائی حصہ میں خلا ہے۔ سیلابی ستون کے پچھلے اور اوپر کے سروں کے محل میں تغیر معلوم کرو جبکہ کرہ ہوائی کے دباؤ میں دیا ہوا تغیر واقع ہو۔

اگر آلہ کے اندرونی کل پارہ کا حجم ۲ ج ہو جہاں بار پیماس کا ارتفاع ۵ ہے تو یہ بھی ثابت کر دو کہ اوپر کی سطح پیش کے تغیر سے غیر متاثر رہیگی۔

(۹) ایک اسطوانی ظرف خواص پانی میں ڈوبتا ہے یہاں تک کہ اس کے کچھ حصہ ح میں ہوا باقی رہتی ہے۔ اس محل میں ہوا کی کچھ مقدار اس میں داخل کی جاتی ہے جس کا حجم کرہ ہوائی کے زیر اثر ۲ ح ہے۔ معلوم کر دو کہ غوص کو کتنی گہرائی تک اور نیچے ڈوبنا چاہیے کہ اس کے اندر کی کل ہوا کا حجم اتنا ہی ہو جائے جتنا کہ محل اول میں تھا۔

نیز اس کے لئے شرط دریافت کر دو کہ محل اول میں جب ہوا زور سے داخل کیجاتی ہے تو ہوا خواص کے نیچے سے چکر نکالنے نہ پائے۔

(۱۰) ایک ظرف ایسی سطح کی شکل کا ہے جسکی تکوین مکانی کی ایک قوس کو جو اس پر ختم ہو جاتی ہے اپنے محور کے گرد گھمانے سے ہوئی ہے۔ اس ظرف کو نیچے وار منہ کے ساتھ پارہ کے ایک برتن میں ڈوبوا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ ظرف کے اندر کی ہوا کا دباؤ اس فاصلے کے مربع کے تناسب معکوس میں ہوگا جو ظرف کے اس اور اندرونی پارہ کی سطح کے درمیان ہے۔ نیز یہ فرض کر کے کہ ظرف کے محور کے طول کو بار پیماس کے ارتفاع کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ۵ م کو ۶ م کے ساتھ ہے ظرف کے اندرونی پارہ کی سطح کی گہرائی معلوم کر دو جبکہ ظرف عین پوری طرح غرق ہو۔

(۱۱) ایک بے وزن فشارہ ایک انتصابی اسطوانہ میں ٹھیک بیٹھتا ہے۔ اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور اس میں ہوا بھری ہوئی ہے۔ ابتداً فشارہ اسطوانہ کے سرے پر ہے۔ اگر پانی فشارہ کے سرے پر آہستہ آہستہ ڈالا جائے تو ثابت کر دو کہ پانی کی اوپر کی سطح زیر ترین ہوگی جب کہ پانی کی گہرائی (۱۰ ف) ہو جہاں آبی بار پیماس کا ارتفاع ۵ ہے اور اسطوانہ کا ارتفاع ۱۰۔

(۱۲) بار پیماکا ارتفاع ۲۹۰۸۸ انچ ہے اور پیش پیماقطہ ششم ہے۔  
بار پیماکا پانی کے ایک پیالہ کو قابض میں رکھ دیا گیا ہے جس سے ہوا خارج  
کر دی گئی ہے۔ اب بار پیماکا ارتفاع ۳۶۰۰ انچ ہو جاتا ہے۔ کرہ ہوائی  
کی ہوا کا دیا ہوا حجم جتنی جگہ گھیرتا ہے اُس کو معلوم کرو اگر اس سے اس کے  
دباؤ اور پیش کی تبدیلی کے بغیر اس کا بخار خارج کر دیا جائے۔

(۱۳) ایک سیڑھی نلی ایک سرے پر بند دوسرے پر کھلی، ایک محور کے گرد جو اس کو  
زاویہ قائمہ پر ملتا ہے مستقل زاویہ رفتار سے گھوم رہی ہے۔ جاذبہ ارض  
کے عمل کو نظر انداز کر کے نلی کے اندر دینی ہوا کی کثافت کسی نقطہ پر معلوم کرو۔  
(۱۴) یکساں سوراخ کی ایک خمیدہ نلی کے بازو ایک دوسرے کے  
علی القواٹم ہیں۔ یہ نلی اپنے انتصابی بازو کے گرد جس کا سر پانی میں غرق ہے  
مستقل زاویہ رفتار سے گھوم رہی ہے۔ ثابت کرو کہ انتصابی بازو میں جس  
ارتفاع تک پانی چڑھ سکا وہ ہوگا

$$\left( \frac{2}{3} \right) \left( 1 - \frac{2}{3} \right)$$

جہاں انہی بازو کا طولی کرہ ہوائی کا دباؤ ۱۳۳ پانی کی کثافت ۱۳  
ہے اور ۱۳ وہ نسبت سے جو کرہ ہوائی کے دباؤ کو اس کی کثافت کے ساتھ ہے  
(۱۵) نصف قطر کی یکساں تیلی دائری نلی جس میں ہوا ہے ایک محور  
کے گرد زاویہ رفتار سے گھوم رہی ہے یہ محور نلی کے وسطی میں واقع  
ہے اور اس کا فاصلہ نلی کے مرکز سے ج ہے ہوا کے وزن کو نظر انداز کر کے  
کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر ج، ۱۳ سے کم ہو اور اعظم اور اقل دباؤ  
و اور ۱۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} (1 + J)$$

(۱۶) اگر دو مقامات کے بار پیمائی ارتفاعوں کے لوکارتموں کے فرق  
کو ۱۰۰۰ سے ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس سے تخمیناً وہ فرق حاصل ہوگا

جوان مقامات کے ارتفاعوں میں ہے جبکہ ان ارتفاعوں کو فیدہوں (Fathoms) میں ناپا جائے۔

(۱۷) — ح اور ح حجم کے دو غیر موصل ظرف ہوا سے بھرے ہوئے ہیں، ان میں ہوا کے دباؤ د، اکت ہیں اور پٹیشیں است، است۔ اگر ہوا کی ان کمیتوں کو ح حجم کے ایک غیر موصل برتن میں ملا دیا جائے تو آمیزہ کا دباؤ معلوم کرو۔

(۱۸) — دو جوئے جن میں ہوا سے شیشے کی یکساں سوراخ دار افقی نلی سے ملا دیئے گئے ہیں اور اس نلی کے اندر مائع کا ایک بلب، ہوا کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے جو فوں کو علی الترتیب ت درجے اور ت درجے تک گر کر بلب کے مقام میں ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے اگر ہر جوئے کی پیش کو بقدر ت درجے کے گھٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ بلب میں مزید ہٹاؤ پیدا ہوگا جو است دانی ہٹاؤ کے ساتھ

$$۲ \text{ عہ تہ} : ۲ + \text{عہ} (ت + ت - ۲ \text{ تہ})$$

کی نسبت رکھیں گے جہاں پھیلاؤ کی شرح عہ ہے۔

(۱۹) — ایک لچکدار کروی لفافہ کے گرد ہوا ہے جو بخار سے سیر شدہ ہے۔ اگر اس کی اندرونی ہوا کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ کا دو چند ہوتا تو اس کا نصف قطر اپنے اصلی نصف قطر کا دو چند ہو جاتا اور اگر اس کے اندر کرہ ہوائی کے دباؤ پر جتنی ہوا سا سکتی ہے اس کے ۷ گنا ہوا ہوتی تو اس کا نصف قطر اپنے اصلی نصف قطر کا سہ چند ہو جاتا۔ یہ فرض کر کے کہ کسی نقطہ پر کا ہٹاؤ ایسے بدلتا ہے جیسے سطح کا پھیلاؤ ثابت کرو کہ ہوا کے دباؤ کا  $\frac{1}{4}$  حصہ بخار کے دباؤ کی وجہ سے ہے جو اس میں شامل ہے۔

(۲۰) — ایک مخروطی خول کا زاویہ راس  $\frac{\pi}{4}$  اور ارتفاع ف ہے اس میں اس کے وزن کا دو چند پانی سا سکتا ہے اس کو اوندھا کر کے (یعنی جبکہ راس اوپر کی طرف ہو) انتصابی محور کے ساتھ پانی میں ڈوبا گیا ہے اور پھر پانی کو زاویہ راس  $\frac{\pi}{4}$  (ج  $\frac{\pi}{3}$  ف  $\frac{\pi}{2}$ ) سے گھمایا گیا ہے۔ گھمانے کی

وجہ سے مخروط پانی میں اس قدر ڈوب جاتا ہے کہ اس کا اس پانی کی سطح میں ہوتا ہے۔ ثابت کر دو کہ آبی بار پیمائے کے ارتفاع کو مخروط کے ارتفاع سے وہی نسبت ہے جو  $\frac{2}{3}$  کے ہے۔

(۲۱) ایک چھوٹے غبارہ میں ہوا ہے اور ۱۰۰ گرین سیسہ اس کے ساتھ بندھا ہوا ہے۔ اس کے لحاظ کی وہی کثافت ہے جو پانی کی ہے۔ سیسہ سمیت اس کو پانی میں ڈبوایا گیا ہے۔ اگر پانی کی تپش اور کرہ ہوائی کے دباؤ پر غبارہ میں ایک مکعب انچ ہوا سا سگے تو کتنی گہرائی تک اس کو ڈبونا پڑے گا کہ یہ غیر قائم توازن کے محل میں آجائے جبکہ آبی بار پیمائے کا ارتفاع ۳۳ فٹ ہو اور یہ دیا گیا ہو کہ

ہوا کی کثافت : پانی کی کثافت : سیسہ کی کثافت = ۱ : ۸۰۰ : ۹۱۳۰  
(۲۲) ایک کیساں ٹھوس مکانی نما سے اس کا نصف حجم علیحدہ کر کے ایک پیالہ بسایا گیا ہے اس طور پر کہ اس کا اندرونی احاطہ ایک مساوی ہم محور مکانی نما ہے جس کا اس قبل الذکر مکانی نما کے ماسکے پر ہے۔ پیالہ سیال میں اوپر دبا رہا اس اور انتصابی محور کے ساتھ ڈبوایا گیا ہے اور نیچے سے اتنی گیس خلا میں داخل کی گئی ہے کہ اس سیال کی سطح میں اٹھ آتا ہے اب اگر پیالے کے اندرونی احاطہ کی نصف گہرائی تک پانی ہو تو ثابت کر دو کہ سیال کی کثافت مکانی نما کی کثافت کا پتہ ہے۔

(۲۳) اگر ہوا کا دباؤ ایسے بدلے جیسے اس کی کثافت کی (۱ +  $\frac{1}{m}$ ) میں ثبوت تو ہمیشہ اور جا ذہ ارض کے تغیرات کو نظر انداز کر کے ثابت کر دو کہ کرہ ہوائی کی بلندی متجانس کرہ ہوائی کی بلندی کا (م + ۱) گنا ہوگی۔

(۲۴) وزن کا فشار ایک انتصابی اسطوانہ میں ساکن ہے۔ اسطوانہ کی عمودی تراش ک ہے اور فشار ہوا کے ستون کی گہرائی  $h$  سے ملتا ہوا ہے۔ فشار کے ڈنڈے پر ایک انتصابی دھک ق پڑتا ہے جس سے فشار بقدر  $F$  فاصلے کے نیچے چلا جاتا ہے۔ ثابت کر دو کہ

(۱۳۶)

$$(د + \pi ک) \{ \text{ف} + \text{لوک} (ا - \frac{\pi}{\rho}) \} + \{ \frac{\pi}{\rho} \} = \frac{\pi}{\rho}$$

جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ  $\pi$  ہے۔

۲۵۔ ایک کرہ می غبارے کا نصف قطر ہے اور اس میں گیس کی کچھ مقدار ہے جسکی کثافت سطح زمین پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ دیر نہ ہے۔ اگر غبارہ متساوی ت کو عین سنبھالنے کے قابل ہو تو ثابت کر دو کہ یہ پھٹ جائے گا اگر اس کی رفتار اتنی ہو جائے جتنی

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\pi}{\rho} + \text{م لوک} (ا - \frac{\pi}{\rho})$$

سے حاصل ہوتی ہے۔ جہاں غبارہ کی حرکت کی مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہے۔

۲۶۔ یہ فرض کر کے کہ کرہ ہوائی پوری فضا میں پھیلا ہوا ہے اور اس کی پیش ہر جگہ یکساں ہے ثابت کر دو کہ سطح پر کے کرہ ہوائی کی کثافت کو زمین کی سطح پر کے کرہ ہوائی کی کثافت کے ساتھ تقریباً  $\frac{1}{2}$  کی نسبت ہوگی۔ یہ دیا گیا ہے کہ سطح کی کثافت دہی ہے جو زمین کی ہے اور اس کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کا نصف ہے اور زمین پر کرہ ہوائی کا دباؤ  $10.33$  گرام فی مربع سمر ہے اور ہوا کے ایک کعب سمکھیت کا وزن  $12.4$  گرام ہے۔ زمین کا نصف قطر  $6369.800$  میٹر ہے۔

۲۷۔ اگر بار بیما کی درجہ بندی کے بعد ہوا کا ایک خفیف حجم ح پارہ کے اوپر کے خلا میں داخل کیا جائے اور پیش غیر متغیر رہے تو ثابت کر دو کہ کسی مشاہدہ شدہ ارتفاع ف کے لئے

$$\frac{\pi}{\rho} \times \frac{\text{ج} - (ا - \pi) \text{ف}}{\pi}$$

کی تصحیح کرنی پڑے گی۔ جہاں تلی کی تراش کا رقبہ  $\pi$ ، برتن کی تراش کا رقبہ  $\text{ج}$  اور  $\text{ج}$  اس خطا ہری خطا کا طول ہے جو ناقص بار بیما کے دوسرے مشاہدہ شدہ

ارتفاع ف کے جواب میں ہے۔  
 ۲۸۔ اگر کہ ہوائی کی تپش بلندی کے ساتھ یکساں طور پر گھٹتی فرض کی جائے  
 تو ثابت کرو کہ سطح بحر سے کسی مقام کا ارتفاع  $H$

$$= \{ 1 - (\frac{F}{F_0})^2 \}$$

جہاں اس مقام پر اور سطح بحر پر بار پیمائے کے ارتفاع بالترتیب  $F$ ،  $F_0$  ہیں اور  
 $H$ ،  $F$  مستقل ہیں۔

۲۹۔ حملی توازن کی حالت میں ثابت کرو کہ کہ ہوائی کی تپش اوپر وار یکساں  
 شرح سے گھٹتی جائے گی۔ اس شرح کو سنٹی گریڈ کے درجوں میں فی ۱۰۰ میٹر معلوم  
 کرو جبکہ حسب ذیل باتیں معلوم ہوں:-

$$\begin{aligned} \text{بار پیمائے کا ارتفاع} &= 4450 \\ \text{تپش (مطلق)} &= 273^\circ \text{ سنٹی گریڈ} \\ \text{ہوائی کثافت} &= 1.29 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\text{پارہ کی کثافت} = 13600$$

$$\text{نوعی حرارتوں کی نسبت (جہ)} = 1.25$$

$$\text{(س-گ، ف نظام میں) -}$$

# باب ششم لام سطحوں کا تناؤ

۱۳۰۔ لام سطحوں (Flexible surfaces) کے توازن کے عام مسئلہ پر لگراج نے (Mecanique Analytique Tom. I) میں اور نیز زیادہ تفصیل سے پائین نے (Memoires de l'Institut, 1812) میں بحث کی ہے۔ ہم اس باب میں خاص قسم کے سوالات پر غور کریں گے جو عام صورت سے پیدا ہوتے ہیں یعنی ایسے سوالات پر جو لام سطحوں پر سیالات کے عمل سے متعلق ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سیال کا دباؤ کسی سطح پر جو سیال کے ساتھ تماس رکھتی ہو اُس سطح کی عمادی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے فی الحقیقت ہمیں ایسی لام ٹم سطحوں کے توازن پر غور کرنا ہوگا جو عمادی دباؤں اور ان کو محدود کرنے والے خطوط پر کے تناؤں کے زیر عمل ساکن ہوں۔

عمومیت کی خاطر اصطلاح 'لام سطح' ایسی چیزوں کو تعبیر کرتی ہے جیسے کپڑا اور بتلا کاغذ جن کو موڑنے میں کوئی قابل متدرمزاحت محسوس نہیں ہوتی اور جو موڑنے یا مڑوڑنے کے بعد اپنی ابتدائی شکل پر لوٹنے کا میلان نہیں رکھتیں۔ کامل طور پر لام سطحوں کو خواہ وہ امتداد پذیر (Extensible) ہوں یا امتداد نا پذیر بلکہ بالکل خیال کیا جائے گا۔

دفعات ذیل میں ہم یہ فرض کریں گے کہ لام سطح کے کسی دو حصوں کے درمیان جو زور عمل کرتا ہے اُس کی سمت سطح کے بالکلہ تماس ہے۔

## تناؤ کا ناپ

ایک ملائم اور بے لچک سطح پر غور کرو جو تناؤ کی حالت میں ہے خواہ یہ سطح استداد پذیر ہو یا امتداد ناپذیر اور فرض کرو کہ نقطہ ن میں سے گزرنے والے کسی عمادی مستوی سے جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کی ایک چھوٹی ٹوس ق ن ق ہے۔ اب اگر خط ق ق سے محدود ہونے والی سطح کے حصوں کے درمیان حاصل عمل ت  $\times$  ق ق ہو جو ماسی مستوی میں ق ق پر عود ہے تو نقطہ ن پر کے تناؤ کا ناپ ت ہوگا۔ یہ الفاظ دیگر نقطہ ن پر کے تناؤ کی شرح ت سے یا وہ قوت جو اس شے کی ایسی تراش پر عمل کرے گی جس کا طول اکائی ہے اور جو ہر جگہ ایسی حالت تناؤ میں ہے جیسی کہ ن پر کی سطح۔

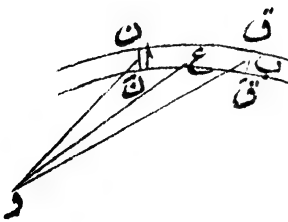
عام طور پر سطح کے ان حصوں کے درمیان جن کو ق ق علیحدہ کرتا ہے جو زور عمل کرے گا وہ ق ق کے عود دار نہیں ہوگا اور اس لئے وہ تناؤ ت  $\times$  ق ق اور قوت ت  $\times$  ق ق کا حاصل ہوگا جہاں قوت ت  $\times$  ق ق مخنی ق ق کے ماس کی سمت میں عمل کرتی ہے اور یہ اسی قسم کی ایک مقدار ہے جیسی کہ ت ہے اور اس کی پیمائش بھی اسی طرح ہوتی ہے۔

۱۳۱۔ ایک ظرف قائم مستد یا سطوائے کی شکل کا ہے جس کی مخنی سطح ملائم اور جس کا محور انتصابی ہے۔ اس ظرف میں سیال ہے۔ کسی نقطہ پر کے تناؤ اور دباؤ کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

(۱۳۸)

فرض کرو کہ سطح کا ایک چھوٹا حصہ ن ق ق ہے جو دو مستویوں کے درمیان جو غور پر عود دار ہیں اور اسطوائے کے درمیان کے درمیان محدود ہے۔

فرض کرو کہ ن ق کے کسی نقطہ پر افقی تناؤ ت اور دباؤ د ہے۔ تب سطح کا عنصر ن ق ذیل کی قوتوں کے





زیر عمل متوازن ہوگا :- عمادی دباؤ  $\times$   $N \times N \times Q$  ، ماسی قوتیں  
 $N \times N \times Q$  اور  $N \times Q$  ، اور  $N \times Q$  پر کے انتصابی تناؤ  
 اگر انتصابی سمت میں کوئی تناؤ عمل کریں -  
 پس تو توں کو عماد و عم کی سمت میں تحلیل کرنے سے جو نقطہ وسطی ع تک  
 کھینچا گیا ہے

$$(N \times N \times Q = 2 \times N \times N \times Q) \text{ جب } (N \times Q)$$

$$2 \times N \times N \times Q = \frac{N \times Q}{2} \text{ ، اگر نصف قطر ہو ،}$$

۱۳۲۔ اگر کسی شکل کی اسطوانی ملائم سطح میں سیال ساکن ہو تو اسطوانے کے  
 محور کے علی القوایم تراش کے کسی نقطہ پر کا تناؤ دہی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ سطح کا ایک عنصر  $N \times Q$  ہے (شکل دفعہ ۱۳۱) فرض کرو کہ  $\Delta$   
 پر کا مرکز انحناء  $\Delta$  پر کا تناؤ  $T$  ، کب پر کات  $+ M$  ت اور نقاط  $\Delta$  اور  
 ب پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ  $M$  ہے۔

نیز فرض کرو کہ  $N \times Q$  پر کے سیالی دباؤ کی سمت کا میلان  $\Delta$  کے ساتھ  
 $M$  ہے جسکو  $\Delta$  ، و ب کے درمیان واقع ہوتا چاہیے۔  
 تب  $\Delta$  پر کے ماس کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے

$$(T + M) \text{ جم ذ۔ } T = \Delta \times B \text{ جب } M \text{ سا}$$

$$= \text{در } M \text{ ذ جب } M \text{ سا}$$

اگر  $\Delta$  پر کا نصف قطر انحناء  $R$  ہو۔

پس بالآخر جب کہ  $M$  ذ معدوم ہو جائے

$$F = \frac{F \times R}{R}$$

اور چونکہ تراش کے ہر نقطہ پر یہ بات صادق آتی ہے اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ ت

مستقل ہے۔

سمت و ع میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے گزشتہ دفعہ کی طرح ربط

(۱۳۹)

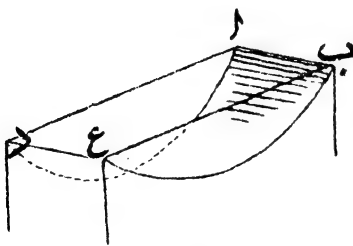
حاصل ہوگا جو سطح کے کسی نقطہ پر کون کے علی التوایم تناؤ، دباؤ اور انحن کے درمیان ربط ہے۔

ت کو مستقل لینے سے مساوات در = ت سے کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم ہو جائیگا اگر سطح دی ہوئی ہو۔

اگر سیال پر عمل کرنے والی قوتیں دی ہوئی ہوں اور اس لئے د، سیال کے اندر کسی نقطہ کے محدودوں کا معلومہ تفاعل ہو تو ایسی مساوات سے مائع سطح کی اختیار کردہ شکل کا تعین ہو جاتا ہے۔

### توبیہ اور لدنیہ

۳۳۱۔ توبیہ ( Lintearia ) وہ منحنی ہے جو مہین کپڑے سے ایک مستقل ٹکڑے پر پانی ڈالنے سے پیدا ہوتا ہے جبکہ اس کے سرے افقی طور پر تھامے گئے ہوں اور پانی بازوؤں پر سے نچلنے نہ پائے۔



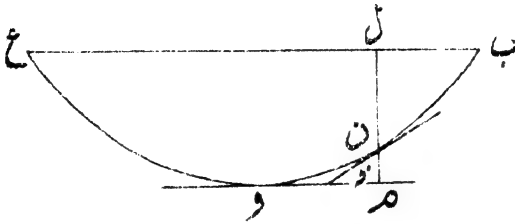
اس طرح اگر کپڑے یا جہلی کے کنارے اب، ع د ایک صندوق کے کناروں پر مثبت کر دئے جائیں اور اگر اضلاع اد، ب ع صندوق پر ٹھیک بیٹھے ہوں اور کپڑے پر پانی ڈال دیا جائے اور پھر اد یا ب ع کے متوازی، ایک انتصابی مستوی سے کپڑے کو تراشا جائے تو یہ عمودی تراشش توبیہ ہوگی۔

دباؤ جو ٹکڑے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے کپڑے کا تناؤ مستقل ہے اور اس لئے اگر نقطہ ن پر کا نصف قطر اغنار ہو اور ب ع پانی کی سطح ہو



$$\begin{aligned} &= \text{م فرء} \\ &\text{س} = \text{م} + \text{مستقل} \\ &\text{یا اگر ہم س کو زیر ترین نقطہ سے ناپیں تو} \\ &\text{س} = \text{م} + \text{..... (۱)} \\ &\text{تب گہرائی ن ل} = \text{ن} - \text{ا} = \frac{\text{م}}{\text{ر}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{م} = \text{م} + \text{ما} + \text{ما} + \text{جم} \\ &\text{م} = \text{م} + \text{ک} + \text{ا} + \text{جن} \\ &\text{ن} = \text{م} + \text{ک} + \text{صن} + \text{..... (۲)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\text{د} = \text{م} = \text{لا} \\ &\text{تو} \quad \frac{\text{نرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم} = \text{ا} - \text{ک} + \text{جن} \\ &\therefore \text{لا} = \text{م} + \text{ک} + \text{ا} - \text{ک} + \text{جن} = \text{فرء} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{یعنی} \quad \text{لا} = \text{م} + \text{ک} + \text{ا} - \text{ک} + \text{جن} = \text{فرء} \quad \text{..... (۳)} \\ &\text{جہاں ق} \quad \text{دوسری قسم کا ناقصی تکملہ ہے۔} \\ &\text{تقدی شرائط یہ ہیں کہ لا، ما، س سب کے سب معدوم ہو جاتے ہیں جبکہ} \quad \text{ا} = \text{.....} \end{aligned}$$

$$\text{ق (خط ۶)} = \text{E. (am u)}$$

اور ان قیمتوں کو مساوات (۲) میں استعمال کرنے سے ہمیں  $b = 2m$  حاصل ہوتا ہے۔ نیز اگر  $a = 1$  اور  $m = 1$  جب کہ  $a = 1$  ف تو ان کو مساوات (۲) میں مندرج کرنے سے  $0 = 6$  پس معلوم ہوا کہ  $e$  کی متناظر قیمت  $k$  ہے جو ناقصی تفاعل کا حقیقی ربعی دور ہے۔ اور اس لئے (۱) اور (۳) سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$l = m \text{ ک}$$

$$l = m \{ 2f \text{ (حک) } - k \}$$

اور

اس لئے ثوبیہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ مستقلوں کے درمیان وہ روابط ہوں جو اوپر بیان ہوئے۔  
۳۴ — لدنیہ (Elastica) وہ منحنی ہے جو ایک لچکدار ڈنڈے کو موڑنے سے پیدا ہوتا ہے یہ ثوبیہ کے متماثل ہے۔

(۱۴۱)

ڈنڈے کو  $b$  و  $c$  سے تعمیر کرو اور فرض کرو کہ توازن  $a$   $b$  اور  $c$  پر کی قوتوں سے جو متضاد سمتوں میں عمل کرتی ہیں برقرار رہتا ہے۔  
نقطہ  $n$  پر جھکاؤ کا معیار  $a$  (Bending moment) انحناء کے متناسب ہے اور اس لئے  $b$   $n$  کے توازن پر غور کرنے سے اور نقطہ  $n$  کے گرومیٹار لینے سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ نقطہ  $n$  پر کا انحناء ایسے بدلتا ہے

Routh, *Analytical Statics*, II. p. 269, or Kelvin and Tait, *Natural Philosophy*, 591

For a full discussion of the Elastica. see Kelvin and Tait, ۵۷

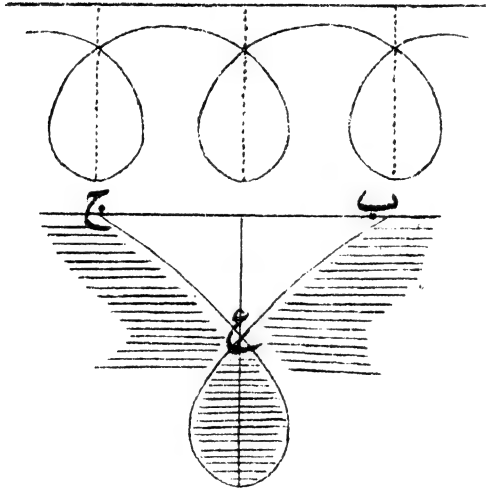
*Natural Philosophy*, 611; Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, p. 384, or L. Levy, *Precis Elementaire de la Theorie des Fonctions Elliptiques*, p. 112.

جیسے ن ل۔ اس طرح

$$ر \times ن ل = م^2$$

اور اس لئے لدنیہ، ثوبیہ کے مماثل ہے۔

۱۳۵۔ لدنیہ لفیفون (convolutions) کی مختلف تعداد پر مشتمل ہو سکتا ہے جس طرح کہ اشکال ذیل سے ظاہر ہے



پانی کی سطح اور اس کے دباؤ کی مناسب ترتیب و تنظیم سے ثوبیہ کے بھی مختلف لفیفے ہو سکتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم ب ج کو سطح آب تصور کریں اور اس طرح کے انتظامات عمل میں لائیں کہ پانی فضا و ع میں بھردیا جائے اور پانی دب ج ماح ص حصول کو اوپر دار دبا ئے تو ہمیں ایک لفیفے والے لدنیہ کے مماثل ثوبیہ مل جائیگا۔

اگر ہم یہ تصور کریں کہ ب ج، مڑے ہوئے ڈنڈے کو ب اور ج پر مس کرتا ہے جس کے لئے یہ ضروری ہوگا کہ ڈنڈا لامتناہی طول کا ہو اور اگر گذشتہ کی طرح وپر کے تماس سے انصراف ناپا جائے تو

$$ر = \infty \text{ جبکہ } ف = ۲۱$$

(۱۴۲)

$$\frac{م}{۲} = \frac{فرس}{فرس} \quad یا \quad ۱ + جم فر = \frac{م}{۲} \quad اور اس لئے$$

اگر س کو دسے ناہیں تو

$$س = م لوک سس \left( \frac{فر}{م} + \frac{م}{فر} \right)$$

آئندہ معلوم ہوگا کہ یہ شعری منجھنی ہے۔

۱۳۶ — ویسٹراس (Weirstrass) کے ناقصی تفاعیل کی  
رقوم میں بھی ہم نو بیہ کی مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ مثلاً دفعہ (۱۳۳) سے

$$\frac{\frac{فر}{۲}}{\frac{فر}{۲} + ۱} = \frac{\frac{فر}{۲}}{\frac{فر}{۲} + ۱} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱ - م}{۲م}$$

$$\therefore \quad ۲ - م - ۱ = \frac{۱}{\frac{فر}{۲} + ۱} - ۱ = -۱ - جم فر \dots\dots (۱)$$

$$\frac{۲ - م - ۱}{۲م} - ۱ = \frac{فر}{فرس} \quad تاکہ$$

$$\frac{۲ - م - ۱}{۲م} = \frac{فر}{فرس} \quad اور$$

$$۲ - م - ۱ = ی \quad تو \quad ۲ (ف - م) = فر - فری$$

$$\frac{۲ - م - ۱}{۲م} = \frac{فر}{فری}$$

لے جس برنولی پہلا شخص تھا جس نے نو بیہ کی مساوات دریافت کی۔

اور فرض کرو کہ  $ی = د + \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف)$

$\frac{1}{۳} (۲م - ۲ف) - د$

تو  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فری}} =$

$\frac{\{۲م + \frac{1}{۲}(۲م + ۲ف)\} \{۲م - \frac{1}{۲}(۲م - ۲ف)\}}{\{۲م + \frac{1}{۲}(۲م + ۲ف)\} \{۲م - \frac{1}{۲}(۲م - ۲ف)\}}$

اب فرض کرو کہ

$\sqrt[۴]{\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}}$

جہاں  $ع = \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف) = ع - \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف) = ع - \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف)$

(۱۲۳) پس چونکہ (۱) سے  $ف = ۲م$  جب  $ع = ۲م > ۲م$

اس لئے  $ع < ع$ ،  $ع < ع$

اس لئے  $د = ف + (ع + ص)$  جہاں ص مستقل ہے

اب  $ف > م$ ،  $ف > م$ ، اس لئے  $ی > ف$

اور  $\frac{1}{۲} (۲م + ۲ف) > د > \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف)$

یعنی  $ع > د > ع$

پس ع کو حقیقی لینے سے، ص کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور سے ہونا چاہیے اور اس کا حقیقی حصہ ع کی زیرین حد کے مناسب انتخاب سے صفر لیا جاسکتا ہے۔

$د = ف + (ع + ص)$

اس طرح چونکہ  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرد}} = \frac{\{۲م + \frac{1}{۲}(۲م + ۲ف)\} \{۲م - \frac{1}{۲}(۲م - ۲ف)\}}{\{۲م + \frac{1}{۲}(۲م + ۲ف)\} \{۲م - \frac{1}{۲}(۲م - ۲ف)\}}$

$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرد}} = \{۲م + \frac{1}{۲}(۲م + ۲ف)\} \{۲م - \frac{1}{۲}(۲م - ۲ف)\}$



$$\text{اور لا} = \text{مر} - \frac{1}{\text{ع}} + \text{طا} + \text{سم} = \text{طا} + \text{سم} = (\text{و} + \text{سم}) = (\text{و} + \text{و}) = 2\text{و}$$

جہاں طا، دیرسٹراس کا زیتا تفاعل (Zeta-Function) ہے اور مستقل ہے۔

نیز جبکہ لا = ۰ تو ی = ۰ اور و = ع = فھ (سم)  
پس ۰ = ۶ اور مر = طا (سم) پس

$$\text{لا} = \text{طا} + \text{سم} - \text{طا} (\text{سم}) - \frac{1}{\text{ع}} + \text{ع} \dots \dots (۲)$$

اور چونکہ ۲ ف ما - ما = ی = و - ع، اس لئے

$$۲ ف ما - ما = فھ (ع + سم) - ع \dots \dots (۳)$$

$$\text{نیز فرس} = \left\{ 1 + \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} \right)^2 \right\} = \frac{۲۲}{\text{فرما}^2}$$

اس طرح اپنی اندراجات سے

$$\frac{۲۲}{\left\{ (۲-۲) (۲-۲) (۲-۲) \right\}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$$

$$\text{اور فرد} = \frac{۲۲}{\text{فرما}^2} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$$

پس فرس = ۲۲ فرما

بشرطیکہ س کو و سے پایا جائے، جہاں ۲ حسب بالا صفر ہو جاتا ہے۔

۴۳ اگر لا = لا اور س = ل جبکہ ما = ن تو اس قیمت کے لئے  
ی = ن اور و = - = \frac{1}{\text{ع}} (۲-۲) = ع

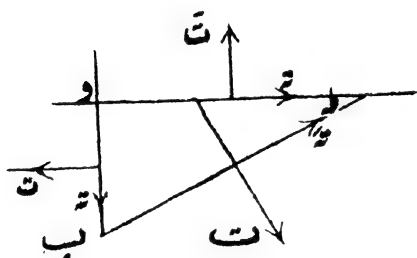
اس لئے فحہ (ع + سم) = عہ ، پس ع کی متناظر قیمت سم ہونی چاہیے اور مستقلوں اور درجوں میں روابط ذیل ہونگے

$$1 = \text{طا (سم)} - \text{طا (سم)} - \frac{1}{2} \text{ غ (سم)}$$

$$L = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

ل = ۲۲۔ ہم نے ایسی صورت کے لئے مشکلیں کھینچی ہیں جس میں پانی ہوا سطح ب ج تک بھرا ہوا ہے۔ لیکن اگر پانی کی مقدار اس سے کم ہو تو کمرے کے وہ حصے جن کو پانی میں نہیں کرتا مستوی ہونگے اور ف س کی قیمت اس صورت میں سطح آب کے نیچے اس کی گہرائی ہوگی۔

۸۔ تناؤ اور ماسی عمل - ایک مستوی ملائم جہلی کے توازن پر غور کرو۔ جہلی کے کسی خط پر کا زور یعنی سطح کے اُن متصلہ حصوں کے درمیان عمل جو اس خط سے محدود ہیں عام طور پر اس خط کے ساتھ میلان رکھے گا اور اس لئے ایک تناؤ اور ایک ماسی عمل سے تعبیر ہوگا۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ کسی دو سمتوں میں جو ایک دوسرے پر علی التوا اُٹھ ہوں یہ کی قیمت دہی ہوئی ہے اور یہ کہ دو سمتیں ایسی بھی ہوتی ہیں جن کے لئے یہ صفر ہو جاتا ہے۔



سطح کا کوئی مربع عنصر لینے سے متقابل اضلاع کے ایک جوڑے پر کے  
ماسی اعمال تہ فرس اور (تہ + صف تہ) فرس انتہا میں جفت تہ صف س ۲  
بناتے ہیں اگر عنصر کا ایک ضلع صف س ہو۔ اور چونکہ اس کی تبدیل دوسرے  
جفت تہ صف س سے ہونی چاہیئے اگر تہ علی القوائیم سمت میں ماسی عمل

ہو اس نے اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ تہ اور تہ مساوی ہیں۔  
اب ایک چھوٹا مثلثی عنصر  $\Delta$  ب ل و جو پرقائم الزاویہ ہے اور زوروں  
کو شکل کے بموجب تعبیر کرو۔

(۱۴۵)

ب ل کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{تہ (ب + تہ و (جم ط + ت} \times \text{و (جب ط = ت} \times \text{و (جم ط + ت} \times \text{و (ب جب ط}$$

$$\therefore \text{تہ} = \text{تہ} = (\text{ت} - \text{ت}) \text{ (جب ط} = \text{تہ} = \text{تہ} = \text{جم ط}$$

تہ صفر ہوگا جب کہ

$$(\text{ت} - \text{ت}) \text{ (مس} = \text{ط} = \text{تہ}$$

جس سے دو علی القوائم سمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۱۳۹۔ اگر شکل میں ہم یہ مان لیں کہ و ل اور و ب صفر ماسی عمل کی سمتیں  
ہیں اور اگر قوتوں کو ب ل کے متوازی اور اس کے علی القوائم سمتوں میں تحلیل  
کیا جائے تو مساواتیں

$$\text{ت} = \text{ت} \text{ (جب ط} + \text{ت} \text{ (جم ط}$$

$$\text{تہ} = \text{تہ} = (\text{ت} - \text{ت}) \text{ (جب ط} \text{ (جم ط}$$

حاصل ہونگی۔

اس صورت میں مقادیر ت اور تہ بڑے سے بڑے اور چھوٹے  
سے چھوٹے یا چھوٹے سے چھوٹے اور بڑے سے بڑے تناؤں کو تعبیر کریں گی اور  
اس لئے ہم ان کو صدری تناؤ کہیں گے۔

۱۴۰۔ اگر ل ب پر کے حاصل زور  $\times$  ل ب کا میلان و ل کے ساتھ فہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{ت} \times \text{و ل}}{\text{ت} \times \text{و ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ت}} \text{ مم ط}$$

$$\therefore \text{مس فہ مس ط} = \frac{\text{ت}}{\text{ت}}$$

نیز  $س \times ا ب = ت \times و ب + ت \times و ا$

$$\therefore س = ت \times ب ا ط + ت \times ج م ط$$

اور ط کو ساقط کرنے سے ہمیں ربط ملیگا

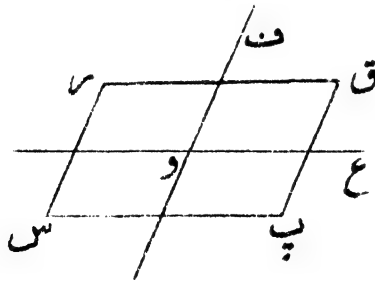
$$س = \frac{ت \times ج م ا ف}{ت \times ا} + \frac{ت \times ب ا ف}{ت \times ا}$$

اگر اب سمتوں  $و ا$  اور  $و ب$  میں نقطہ  $و$  کے صدر سی تناؤ  $ت$  اور  $ت$  ہوں اور اگر  $و ع$  کا میلان  $و ا$  کے ساتھ ہو تو  $و ع$  پر کے زور کی سمت  $و ف$  مساوات

$$مس ف مس ط = \frac{ت}{ت}$$

سے حاصل ہوگی اور زور کی مقدار فی اکائی طول سمت  $و ف$  میں اس ناقص کے نصف قطر سے تعبیر ہوگی جس کے نصف محاور صدر سی تناؤں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۱۴۱۔ مزدوج زور۔ اگر  $و ع$  کا زور  $و ف$  کی سمت میں عمل کرے تو  $و ف$  پر کا زور  $و ع$  کی سمت میں عمل کرے گا۔ (۱۴۲)



کیونکہ اگر ہم ایک ایسے عنصر کے توازن پر غور کریں جو ایک متوازی الاضلاع  $پ ق س$  کی شکل کا ہو اور جس کے اضلاع  $و ع$  اور  $و ف$  کے متوازی ہوں تو  $پ س$  اور  $ق س$  پر کے زور متعادل ہیں اور اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے

کے پتی اور سراسر کے زور بھی تقابل میں ہیں اور اس لئے سمتوں و ع اور ع و میں عمل کرتے ہیں۔  
 ۱۴۲۔ اگر و ع اور و ف میں سے کے مزدوج زور سہا اور سہا ہوں اور اگر صدی تناؤ ت کی سمت کے ساتھ و ع اور و ف کے میلان طہ اور فہ ہوں تو دفعہ (۱۴۰) سے مساواتیں

$$\frac{1}{\text{مرہ}} = \frac{\text{جم فہ}}{\text{تہ}} + \frac{\text{جب فہ}}{\text{تہ}}$$

$$\frac{1}{\text{ترہ}} = \frac{\text{جم طہ}}{\text{تہ}} + \frac{\text{جب طہ}}{\text{تہ}}$$

حاصل ہوتی ہیں۔ جہاں طہ اور فہ میں ربط ہے

$$\text{مس فہ مس طہ} = \frac{\text{تہ}}{\text{تہ}}$$

طہ اور فہ کو سا قہ کرنے سے

$$\text{سہا} = \text{تہ} = \text{تہ}$$

پس معلوم ہوا کہ کسی نقطہ پر دو مزدوج زوروں کا حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے اور یہ مستقل صدی تناؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۱۴۳۔ سہا ہی نتیجے دو شلٹی عناصر و ا ب، و ا ب کے توازن کی شرطوں کو لکھ لینے سے حاصل ہو سکتے ہیں جہاں ا ب اور ا ب، و ع اور و ف کے متوازی ہیں۔

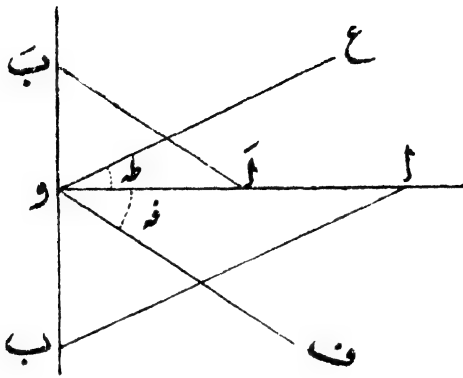
اس طرح ہمیں مساواتیں

(۱۴۲)

$$\text{سہا جم فہ} = \text{تہ جب طہ} \quad \text{سہا جب فہ} = \text{تہ جم طہ}$$

$$\text{سہا جم طہ} = \text{تہ جب فہ} \quad \text{سہا جب طہ} = \text{تہ جم فہ}$$

حاصل ہونی چاہئیں۔ ان سے ہم مذکورہ بالا نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔



۱۴۴۔ اب اگر ہم ایک ملائم جہلی کی صورت پر غور کریں جو سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے اور اس کے ایک چھوٹے عنصر کے توازن پر غور کریں تو گزشتہ تین دفعات کے نتائج اس صورت پر بالکل عاید ہو جاتے ہیں کیونکہ عمادی دباؤ کے اجزائے تحلیلی انتہا میں بمقابلہ ماسی عمل کے معدوم ہو جاتے ہیں۔

۱۴۵۔ صدری تناؤ کسی شکل کی ایک ملائم سطح سیال کے زیر عمل ہے۔ کسی نقطہ پر کے دباؤ صدری تناؤں، اور ان تناؤں کی سمتوں میں انخناؤں کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے۔  
فرض کرو کہ ن کے متصل نقطے ق، ق ہیں جو ن میں سے گزرنیوالے

لہ طالب علم کو یہ سمجھ لینا چاہیئے کہ صدری تناؤں اور صدری انخناؤں کے درمیان کوئی تعلق ہے۔

مثلاً ایک ایسی جہلی پر غور کرو جو ایک اسطوانہ کے گرد بیٹھی گئی ہے جہلی پر اسی گھائی کے مرغولی خطوط (Helical lines) کی کچھ تعداد کھینچو۔

جہلی کو ان خطوط کی سمتوں میں تلیا جاسکتا ہے جو بالا خر بڑے سے بڑے تناؤ کی سمتیں بن جائیگی اس صورت میں عمودی تناؤ صفر ہوگا اور ایک کون پر کے اندر کی سمت اس کون کے سٹیلان ہوگی۔

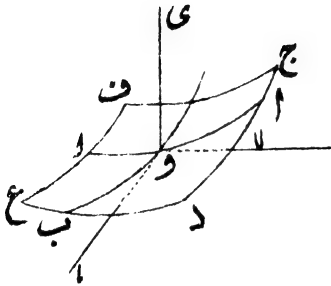


$$+ \left\{ 1 + \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ م}} \right) \right\} \frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ م}}$$

اس مساوات کو لگرائج اور پائسن نے حاصل کیا تھا۔

۱۴۶۔ کسی سمت میں تناؤ۔ اگر ت اور ت کی سمتیں وہی نہ ہوں جو صدری تناؤں کی ہیں تو مساوات میں ماسی عمل داخل ہوگا۔

سطح پر کوئی نقطہ ولو اور ول،  
دوب ایک دوسرے پر علی القوائم لے کر  
فرض کرو کہ ان سمتوں میں تناؤ ت، ت  
ہیں اور ماسی اعمال ت، ت۔ وہ پر  
عمادوی کھینچو۔



عمادی مستویوں (اوی، ابوی  
کے متوازی اور ان سے بالکل قریب چار  
مستوی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مستوی سطح کو  
ج د، د ع، ع ف، ف ج میں  
قطع کرتے ہیں۔

تب بالآخر ج د اور ع ف کے ماسی اعمال ت × ج د اور ت × ع ف  
ایک دوسرے کے مساوی مگر سمت میں مخالف ہیں، یہی حال ع د اور ج ف پر کے  
ماسی اعمال کا ہے۔

(۱۴۹)

پس وی کے گرومیٹر اثر لینے سے دفعہ ۱۳۸ کی طرح، یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ ت = ت۔  
اگر سختی ج د کے نقطہ ا پر کے ماس کا میلان مستوی لا م کے ساتھ طہ ہو تو

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ م}} \times \frac{1}{\text{د}}$$

لے کیونکہ ہم کہہ سکتے ہیں

$$\text{مس ط} = \text{ف} (د) = \text{ف} (۰) + (د) \times \text{ف} (۰) + \dots$$



اور اسی طرح نقطہ لاپر

$$\text{مس لہ} = \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}} \quad (- \text{و ل})$$

پس سمت وی میں اعمال ت  $\times$  ج د اورت  $\times$  ع ف کا مجموعہ

$$= \text{ت} \times \text{ج د} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}} \quad (- \text{و ل}) - \text{ت} \times \text{ع ف} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}} \quad (- \text{و ل})$$

$$= \text{ت} \times \text{ج د} \times \text{د} \times \text{ع} \times \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}}$$

اور اسی طرح کی رقم عمل ت سے حاصل ہوگی۔

وی کی سمت میں تحلیل کرنے سے اب ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{د} \times \text{ج د} \times \text{ع} = \text{ت} \times \text{ج د} \frac{\text{و ل}}{\text{ر}} + \text{ت} \times \text{ع} \frac{\text{و ب}}{\text{ر}} + \text{ت}$$

$$\text{د} \times \text{ج د} \times \text{ع} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}} = \text{د} = \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \text{ت} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}}$$

۱۴۷ — دفعات (۱۳۹) اور (۱۴۵) سے بھی یہی نتیجہ حاصل کیا جاسکتا ہے

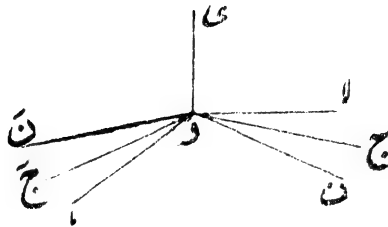
اور اگرچہ یہ طریقہ بہت طویل ہے لیکن اس میں یہ فائدہ ہے کہ ہمیں صدی تناؤ کی سمتوں اور صدی انحناء کی سمتوں کے درمیان تمیز کرنے کی اہمیت اچھے طور پر واضح ہو جاتی ہے۔

بقیہ نوٹ صفحہ ۱۲۸ — جہاں ف (۰) = مس لہ کی قیمت پر لینی و پر جف<sup>۲</sup>ی کی قیمت اورت (۰) =

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}} \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}} \right) \text{ یا } \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2 \text{ا}} \right) \text{ کی قیمت و پر۔}$$

لہ۔ ملائم سطحوں کے توازن کے عام مسئلہ پر ڈلیو، ایچ، بیسٹ نے

Quarterly Journal of Mathematics, Vol. IV. 1860. میں بحث کی ہے۔



(۱۵۰) اگر کسی دو علی القوالم سمتوں والا کو ا میں تناؤ تھا، تہا ہوں اور ان میں سے کسی ایک سمت میں ماسی عملت ہو اور سمتوں ون، ون میں صدری تناؤ تھا، تہا ہوں اور زاویہ ن ولا = ط، تو وضع (۱۳۹) کی رو سے

$$ت = تجم ط + ت جب ط$$

$$ت = ت جب ط + تجم ط$$

$$ت = (ت - ت) جب ط جم ط$$

اور

اب اگر صدری انخما کی سمتیں وج، وج ہوں اور زاویہ ج ولا = ف، اور انخما کے صدری نصف قطر ہا، ہا ہوں اور ولا، ولا ون، ون میں سے گزرنے والی عمادی تراسوں کے نصف قطر ہا، ہا، ہا، ہا ہوں تو

$$\frac{1}{ر} = \frac{جم ف}{ر} + \frac{جب ف}{ر} ، \frac{1}{ر} = \frac{جم ف}{ر} + \frac{جب ف}{ر}$$

$$\frac{1}{ر} = \frac{جم (ط - ف)}{ر} + \frac{جب (ط - ف)}{ر} ، \frac{1}{ر} = \frac{جم (ط - ف)}{ر} + \frac{جب (ط - ف)}{ر}$$

$$\therefore \frac{ت}{ر_1} + \frac{ت}{ر_2} = (ت \text{ جب } \phi + ت \text{ جب } \phi) \left( \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_1} + \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_2} \right)$$

$$+ (ت \text{ جب } \phi + ت \text{ جب } \phi) \left( \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_1} + \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_2} \right)$$

$$= \left\{ \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_1} - \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_2} + \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_1} + \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_2} \right\} \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_1} + \left\{ \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_1} - \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_2} + \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_1} + \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_2} \right\} \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_2}$$

$$= \frac{ت}{ر_1} + \frac{ت}{ر_2} - (ت - ت) \left( \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_1} - \frac{ت \text{ جب } \phi}{ر_2} \right)$$

$$= \frac{ت}{ر_1} + \frac{ت}{ر_2} - ت \text{ جب } \phi \left( \frac{1}{ر_1} - \frac{1}{ر_2} \right)$$

$$\therefore \frac{ت}{ر_1} + \frac{ت}{ر_2} = (ت \text{ جب } \phi) \left( \frac{1}{ر_1} - \frac{1}{ر_2} \right) + \frac{ت}{ر_1} + \frac{ت}{ر_2}$$

لیکن دس کے قرب و جوار میں سطح کی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$y = \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} \text{ اگر } r_1 \text{ اور } r_2 \text{ کے عماد کو محور مانا جائے و لاؤ،}$$

وی کے حوالے سے یہ مساوات ہوگی  $y = r_1 + r_2 = r_1 + r_2$

اور چونکہ محوروں کے ان دونوں کا درمیانی زاویہ  $\phi$  ہے اس لئے

$$\text{جب } \phi = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\text{اور } (r_1 - r_2) = r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

$$= \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{r_1}{r_2}$$

$$^2\left(\frac{1}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}}\right) =$$

(۱۵۱) اور ف سر کا دہر جف<sup>۲</sup> جف لا جف<sup>۲</sup> کی قیمت ہے۔

$$\therefore \text{جب } ^2\text{فر}\left(\frac{1}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}}\right) = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا جف}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ت لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ت را}}{\text{را}} + \frac{\text{ت د}}{\text{د}} = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا جف}^2}$$

۱۴۸۔ ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر انتخاب شدہ سمتیں د لا و را، صدری انخا کی سمتوں پر منطبق ہو جائیں تو  $\text{د} = \text{لا}$  اور  $\text{د لا}$  بالابال

$$\text{د} = \frac{\text{ت لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ت را}}{\text{را}}$$

میں تحویل ہو جاتا ہے۔ پس یہ ضابطہ درست رہتا ہے جبکہ منتخبہ سمتیں صدری تناؤ کی سمتیں ہوں یا صدری انخا کی سمتیں۔

۱۴۹۔ اگر ہم ایک ایسی سطح کا تصور کریں جس کی نوعیت اس طرح کی ہو کہ اس کے کسی نقطہ پر کا تناؤ اس نقطہ میں سے گزرنے والے ایک خط تقسیم پر ہمیشہ عمود وار عمل کرے تو یہ بتایا جاسکتا ہے کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ ہر سمت میں دہری ہوتا ہے۔

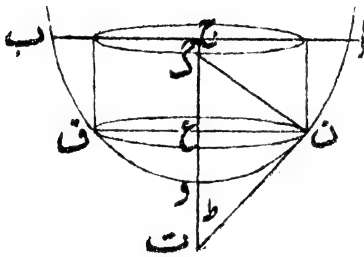
اگر ایسی سطح کے ایک چھوٹے مثلثی حصہ پر غور کیا جائے تو ماسی مستوی کے اندر کا توازن مثلث کے ضلعوں کے تناؤ سے پوری طرح متعین ہو جاتا ہے کیونکہ ماسی مستوی میں کے قوار عالم (اگر کوئی ہوں) بمقابلہ تناؤں کے بالآخر معدوم ہو جاتی ہیں اور چونکہ ضلعوں کے تناؤ اضلاع پر عمود وار ہیں ان کو ضلعوں کے طولوں کے

متناسب ہونا چاہیے اور اس لئے تمام سمتوں میں تناؤ کے ناپ وہی ہیں۔ نیز سطح پر تناؤ ہر جگہ وہی ہوگا کیونکہ اگر ایک چھوٹے سطحی عنصر پر غور کیا جائے تو متقابلہ ضلعوں پر کے تناؤ مساوی ہونے چاہئیں۔

اس قسم کی سطح کا تصور کرنا بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ ایک کامل استوار جسم یا ایک سیال کامل کا تصور کرنا ہے تاہم ایسی سطحوں کے قریب ترین نوٹے مانع جھیلوں کی

صورت میں ملتے ہیں۔ مثلاً صابونی بلبہ کی صورت میں یا ان جھیلوں کی صورت میں جو شیشے کی بوتل میں نظر آئیں گی جبکہ اس کے اندر کے مائع کو خوب ہلایا جائے۔  
مائع جھیلوں کی بحث کو ہم آئندہ باب تک ملتوی رکھتے ہیں۔

۱۵۔ ایک طرف جو مائع اور امتداد پذیر شے سے بنایا گیا ہے گروشی سطح کی شکل کا ہے۔ اس کو انتصابی محور کے ساتھ پکڑ کر متجانس مائع سے (۱۵۲) بھر دیا گیا ہے۔ کسی نقطہ پر صدر می تناؤ معلوم کرنا مطلوب ہیں۔  
فرض کر دو کہ و طرف کا زیر ترین نقطہ ہے۔ دو کو مبدأ قرار دو۔



لا کو انتصاباً اور پروار بنا دو اور  
فرض کر دو کہ کوئی افقی تراش  
ن ع ق ہے۔ اوپر کا  
کنارہ ا ج ب ہے  
جو ثابت ہے۔

افقی تراش ن ق  
کے تمام نقطوں پر دباؤ صریحاً  
دہی ہے۔

فرض کر دو کہ نصف النہاری تناؤ است سے یعنی وہ تناؤ جو منحنی ان کے  
نقطہ ن پر کے تماس کی سمت میں نقطہ ن پر عمل کرتا ہے اور فرض کر دو کہ نقطہ ن پر  
افقی تناؤ است ہے۔ یہ صدر می تناؤ ہیں۔ تراش ن ق کے ساتھ ساتھ تناؤ است  
کا انتصابی حاصل، سطح ن و ق پر کے حاصل انتصابی دباؤ کی تبدیل کرتا ہے۔  
پس اگر

$$د = ع، لا = ن = م، ا = د = ن = ت = و = ط$$

$$تو \quad م ا م ا م ج ط = م ا م ج ط + م ا م ج ط (م - لا) \quad اگر ج = م$$

اس مساوات سے  $\theta$  کا تعین ہو جاتا ہے۔ اور  $\theta$  مساوات

$$\frac{\theta}{r} + \frac{\theta}{r} = \frac{\theta}{r} \quad \text{دفعہ (۱۳۵)}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں  $\theta = \text{ج} \theta$  (م - لا)۔  
یہ یاد رہے کہ منحنی  $\theta$  کے نقطہ  $\theta$  پر نصف قطر انخار رہے اور اس کے  
عمود وار جو عمادی تراش ہے اس کا نیم قطر انخار یعنی  $\theta$  گ ہے۔  
۱۵۱۔ اس سے زیادہ عام مسئلہ حسب ذیل ہے۔

ایک لامنظم ظرف گردش سطح کی شکل کا ہے اور سیالی و باد کے  
زیر عمل ہے اس طرح پر کہ کسی دائری تراش کے تمام نقطوں پر سیالی  
وباد وہی ہے۔ کسی نقطہ پر کے صدری تناؤ معلوم کرنا مطلوب ہیں۔  
فرض کرو کہ  $\theta$ ،  $\theta$ ،  $\theta$  دو متصل دائری تراشیں ہیں اور  
نقطہ  $\theta$  پر کا نصف النهاری تناؤ  $\theta$  ہے۔

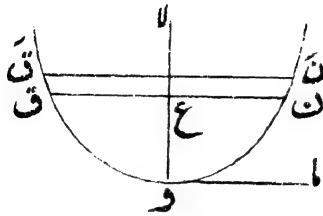
اگر  $\theta$  =  $\theta$  تو دائرہ  $\theta$  پر محور کے متوازی حاصل تناؤ

$$= \frac{\theta}{r} \text{ مات فرلا}$$

$\theta$  پر ولا کے متوازی حاصل تناؤ

$$= \frac{\theta}{r} \text{ مات فرلا} + \frac{\theta}{r} \text{ مات فرلا} \text{ (مات فرلا) (مات فرلا) (مات فرلا)}$$

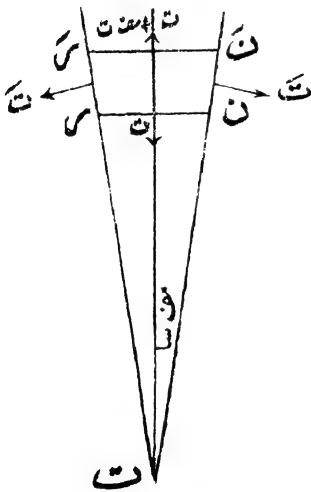
۱۵۲۔ یہ مساوات اس صورت کے لئے اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے ایک چھوٹا عنصر  $\theta$  جو انخار کے  
خطوط سے محدود ہو یعنی نصف النهاروں اور افقی دائروں سے (Meunier)  
کا مسئلہ استعمال کرو اور اس کا خیال رکھو کہ انخار کے خطوط کے منحنی عام طور پر عمادی مستوی  
ہیں ہوتے۔



ان دونوں کا فرق، دائروں  
ن ق، ن ق کے درمیان  
سطح کی جو بیڑی ہے اُس پر کے ولا  
کے متوازی حاصل دباؤ کی  
تغذیل کرتا ہے۔ یہ حاصل دباؤ  
۲۲ × ۱۱ ماہف من فرما  
فرس  
کے مساوی ہے اگر دائرہ  
ن ق کے کسی نقطہ پر کا دباؤ  
ہو۔

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} \right) = \text{دما فرس}$$

اور چونکہ لاکا ایک دیا ہوا تقاطع ہے اور اسلئے  
س کا تقاطع ہے اس لئے یہ مساوات تناؤات  
کا تعین کرتی ہے اور ت گذشتہ کی طرح مساوات



$$\frac{ت}{ر} + \frac{ت}{ر} = د$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۵۲۔ د کو سا قط کرنے سے ہیں ت اور ت  
میں ایک ربط حاصل ہوگا لیکن بہتر یہ ہے کہ یہ ربط  
بالراست حاصل کیا جائے۔

ایک چھوٹا عمود ن ت مر لو جو نصف النہار  
قوسوں ن ت، مر مر سے اور دائری قوسوں  
ن مر، ن ت مر سے محدود ہے، فرض کرو کہ

نصف النہاری مستویوں کا درمیانی زاویہ مف ف ہے اور نصف النہاروں کے نقاط ن اور م پر کے ماسی خطوط کے درمیان زاویہ ۲ مف سا ہے۔

تب  $\frac{ن}{م} = \frac{م}{ن}$  اور  $\frac{ن}{ت} = \frac{م}{ت}$  مف سے  
ن م اور ن م کی تنصیف کرنے والے نصف النہار کی سمت کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے

$$\frac{ف}{م} (ت م مف ف) = م = ۲ ت مف م جب مف سا$$

$$= \frac{ت مف م}{ن ت} = \frac{ن م}{ن ت} = \frac{م مف م}{ن ت}$$

اور چونکہ

$$\frac{ا}{ن ت} = جب ط = \frac{ف}{م} ، شکل دفعہ (۱۵۰)$$

(۱۵۴) اس لئے مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\frac{ف}{م} (ت ا) = ت$$

اور چونکہ  $ر = ا$  قسط اس لئے

$$\frac{ت}{ر} + \frac{ت جم ط}{ا} = د$$

اور اس لئے ان دو مساواتوں سے ت اور د معلوم ہو جاتے ہیں۔  
پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ اگر کسی افقی تراش پر ت اعظم یا اقل ہو

اور اس لئے  $\frac{ف}{م}$  صفر ہو جائے تو

$$ت = ت$$

لیکن اگر مابھی اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ برآمد نہیں ہوتا کیونکہ ہم یہ نتیجہ نہیں نکال سکتے کہ  $\frac{ف}{م}$  صفر ہے۔

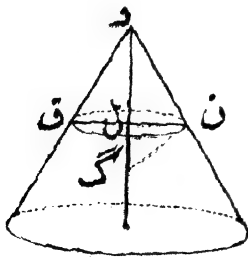


پھر اگر ہر نقطہ پر  $د$  =  $د$  تو  $فرت$  =  $۔$  اور اس لئے  $د$  مستقل ہے۔

۱۵۳ — امثلہ — (۱) ایک مخروطی شکل کے کامل طور پر ملائم اور لچکدار تھیلے کو نیچے وار منہ کے ساتھ ایک افقی مستوی پر کور سے جوڑ دیا گیا ہے اور اس پر کے ایک چھوٹے سوراخ کے ذریعہ اس کو مانع سے بھر دیا گیا ہے جس سے سکون کی حالت میں اس کی شکل قائم مستدیر اسطوانہ کی شکل ہو جاتی ہے۔ اگر مستوی سے اس کا الحاق توڑ دیا جائے اور مانع باہر نکل پڑے تو اس شکل کی مسادات معلوم کرو جو یہ اختیار کریگا اگر اس کے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے۔

فرض کرو کہ نقطہ  $ن$  پر کمون  $ون$  کے عمود وار سمت میں تناؤ  $د$  ہے اور سمت  $ون$  میں تناؤ  $د$  ہے اور مخروط کا زاویہ  $راس$   $۲$  ہے۔

$$تب \quad د = \frac{د}{۲} + \frac{د}{۲} \text{ سے (اگر } د = لا) \text{ حاصل ہوگا}$$



$$ج \text{ ث } لا = \frac{د}{ن} = \frac{د}{لا} \text{ سے قطعہ}$$

یا  $د = ج \text{ ث } لا$  سے قطعہ

لیکن  $ن$  لی  $د$  جم  $د = د$   $ن$   $ق$  پر حاصل انتصابی دباؤ  
 $= \frac{د}{۲} ج \text{ ث } لا$  سے

ت =  $\frac{1}{3}$  ج ث لاسر عم قطعہ  
فرض کرو کہ مانع بکل جانے کے بعد سطح جس گروشی سطح کی شکل اختیار کرتی ہے  
اس کا ٹکونی مخنی و ن قی ہے، اور و ل = ضا، ن ل = عا، اور ن  
نقطہ ن کا جواب ہے۔

اگر ن قی = مف س، مخنی کی ایک چھوٹی قوس



تو مف لاقطعہ = مف س  $(1 + \frac{ت}{ل})$

اور لاسر عم = عا  $(1 + \frac{ت}{ل})$

لچک کے مقیاس کو دونوں سمتوں میں مختلف لینے سے۔

ت اور ت کی حاصل شدہ قیمتوں کو استعمال کر کے لاکو ان دو مساواتوں  
سے ساقط کیا جاسکتا ہے اور اس طرح ضا اور عا میں ایک ربط حاصل ہو جاتا ہے۔

(۱۵۵)

ج ث مس عم قطعہ =  $\frac{1}{3}$  رکھو اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{1}{\frac{ل}{۲} + 1} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}$$

∴  $\frac{\text{س}}{۱} \text{ جم عم} = \text{مس} - \frac{ل}{۱}$ ، اگر س کو دے نایا جائے

$$\frac{ل}{۱} = \text{مس} - (\frac{\text{س}}{۱} \text{ جم عم})$$

لا کی یہ قیمت دوسری مساوات میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

لاسر عم  $(\frac{\text{س}}{۱} \text{ جم عم}) = \text{عا} \{ 1 + \frac{\text{ج ث لاسر عم قطعہ مس} (\frac{\text{س}}{۱} \text{ جم عم})}{ل} \}$   
جو مخنی کی تفرقی مساوات ہے۔

اگر  $L = \text{تو اس عم} = \text{عالم} \left( \frac{\pi}{4} \text{ جم عم} \right) + 3 \text{ مس} \left( \frac{\pi}{4} \text{ جم عم} \right) \{$   
 (۲) ایک لامٹم جہلی زنجیرہ نما (Catenary) کی شکل کی ہے یعنی یہی سطح  
 کی شکل کی ہے جس کی تکوین ایک زنجیرہ کو اس کے مرتب کے گرد گھمانے  
 سے ہوتی ہے۔ اس جہلی کے سرے نصف قطر  $a$  کے دو مساوی  
 دائری تختوں سے ثابت کر دئے گئے ہیں بلندرونی ہوائی دباؤ کا اضافہ  
 بیرونی ہوائی دباؤ پر د معلوم ہے۔

اس صورت میں انخنا متقابل سمتوں میں ہیں اور اگر ن پر کا عبادن گ  
 ہو تو ہر ایک نصف قطر انخنا گ کے مساوی ہوگا اور توازن کی مساواتیں ہونگی

$$T - t = w \times n \text{ گ} \quad \text{اور} \quad T = \frac{F}{\cos \alpha} \text{ (مات)}$$

$$\text{اور چونکہ} \quad n \text{ گ} = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ رک} \quad \text{فرت} = \frac{F}{\cos \alpha} = \text{دما جہاں ک زنجیرہ کا مستقل ہے}$$

$$2k (T - t) = w (a^2 - k^2)$$

جہاں  $t$ ، راس پر کا نصف انہاری تناؤ ہے

$$T = t + \frac{w}{2k} (a^2 - k^2) \quad \text{اور}$$

ان میں سے پہلی مساوات حصہ  $a$  کے توازن پر غور کرنے سے فوراً  
 حاصل ہو سکتی ہے جہاں زنجیرہ کے راس کو  $a$  تعبیر کرتا ہے اور پھر  $T$  کی قیمت  
 مساوات  $T - t = \frac{w}{2k} (a^2 - k^2)$  سے حاصل ہو جاتی ہے۔  
 اگر تختوں کے وزن کو نظر انداز کیا جائے اور یہ فرض کیا جائے کہ

اندرونی ہوا کے دباؤ سے توازن برقرار رہتا ہے تو

$$۲۲ \text{ و } ۲۳ = \frac{ک}{۱} \left\{ \frac{۲}{ک} (۲ - ک) + ۲ \right\}$$

جس سے

$$۲ = ۲ - د ک$$

اور پھر تناؤ ہو جاتے ہیں۔

$$ت = \frac{د ۲}{ک} \quad \text{اور} \quad ۳ = \frac{د ۲}{ک}$$

(۱۵۶) — ہم نے اب تک صرف یکساں موٹائی کے پتروں پر غور کیا ہے لیکن ایسی صورتوں کو بھی شامل کرنے کی خاطر جن میں پترے متغیر موٹائی کے ہوں تناؤ کا زیادہ عام ناپ دریافت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی متجانس مادے کی سلاخ اُلب سے وزن و لٹکایا گیا ہے اور سلاخ کی تراش کا رقبہ کہ ہے۔ تب ن میں سے گزرنے والی تراش پر کا تناؤ، وزن و اور سلاخ کے حصہ ن ب کے وزن کو تھامے ہوئے ہے۔

اور اگر ان اوزان کا مجموعہ ۲ کہ ہو تو نقطہ ن پر تناؤ کا ناپ فی اکائی رقبہ ۲ ہوگا۔

یہ معلوم رہے کہ ت کی نسبت ۲ کا ہر بقدر ایک کے کم ہے۔



درحقیقت اگر کسی نقطہ پر ایک ملائم پترے کی موٹائی

ع ہو اور اس پر کا تناؤ ت ہو جو معمولی طریقہ سے تراش کی فی اکائی طول کے لئے معلوم کیا گیا ہے تو

$$ت \text{ مف س } = ت \text{ ع مف س}$$

$$ت = ت \text{ ع}$$

یا

۱۵۵۔ اس باب کے مسائل عموماً اُن سطحوں پر قابل استعمال نہ ہونگے جو غیر ملائم یا جن کی لامنت ناقص ہو۔ لیکن اگر کسی خاص صورت میں سطح کے متصلہ حصوں کا درمیانی عمل کلاً ماسی مستوی میں ہو تو تناؤ اور عمادی دباؤ کے درمیان محصلہ ردوابط برقرار رہیں گے۔

مثلاً اگر ایک انقباضی ستد یا اسطوانہ کسی غیر ملائم شے سے بنا ہوا دھسے سیال بھر دیا جائے تو کسی نقطہ پر کا عمل کلاً ماسی سمت میں ہوگا اور اس کی نوعیت تناؤ کی سی ہوگی۔

## امثلہ

۱۔ یہ فرض کر کے کہ براما کے شلنجو کے اسطوانے ایک ہی مادی شے سے بنے ہوئے ہیں اور ہر ایک کے اندر زور (Stress) وہی ہے اسطوانوں کی موٹائیوں میں نسبت معلوم کرو۔

۲۔ ایک اسطوانی ظرف ڈی ایچ مرٹے دات کے پتر سے بنایا گیا ہے اور اسی دات کا ایک ڈبڈا جس کی تراش کا نصف ڈی ایچ مرٹے دات کے بغیر ڈھنڈے کے وزن و کوئیں سنبھال سکتا ہے۔ اگر اسطوانہ کو انقباضی زور کے ساتھ رکھا جائے تو معلوم کرو کہ اس میں کتنے سیال ڈالا جاسکتا ہے کہ یہ پھٹ نہ جائے۔

۳۔ ڈھلے ہوئے لوہے کی تناؤی (Tensile) طاقت تراش کے فی مربع ایچ کے لئے ۱۶۰۰۰ پونڈ وزن ہے۔ ایک ڈھلے ہوئے لوہے کے پانی کے ایسے تل کی موٹائی معلوم کرو جس کا اندر دنی قطر ۱۲ ہے کہ اس پر کا زور اس کی انتہائی مضبوطی کا صرف ۱/۲ ہو جبکہ پانی کا ارتفاع ۴۴ فٹ ہو۔

۴۔ ایک جوف مخروط کا جس کا راس نیچے دار ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ مفتی تناؤ و سب سے زیادہ کہاں ہے۔

نیز معلوم کرو کہ کون کی سمت میں تناؤ کی قیمت سب سے زیادہ کہاں ہے۔

۵۔ ایک مستطیلی صندوق کے اوپر کا رخ یکساں پکڑا بندھن (Band) کو (۱۵۷) اس کے مقابل ضلعوں پر باندھ دینے سے بند کر دیا گیا ہے بندھن دوسرے اصطلاح پر

ٹھیک بیٹھی ہے۔ اگر صندوق سے ہوا بتدریج خارج کر دی جائے تو پچکار بندھن جو شکلیں اختیار کرتی ہے ان کو معلوم کرو۔ اور جب بندھن صندوق کی تہ کو عین مس کرے تو اس وقت کرہ ہوائی کے اندرونی و بیرونی دباؤں میں جو فرق ہوگا اس کو معلوم کرو۔

۶۔ داری سوراخ کی ایک پچکار نلی، مربع سوراخ کی ایک استوار نلی میں رکھ دی گئی ہے جس میں وہ بیٹھ رہے ہوئے ٹھیک بیٹھ جاتی ہے۔ نلیاں لاتنا ہی طول کی ہیں۔ اگر نلیوں کے درمیان ہوا نہ ہو اور کسی دباؤ کی ہوا پچکار نلی میں داخل کی جائے تو ثابت کرو کہ یہ دباؤ اس نسبت کے متناسب ہوگا جو پچکار نلی کے اس حصہ کو جو استوار نلی کو مس کرتا ہے اس حصہ سے ہے جو مخنی شکل کا ہے۔

۷۔ ایک ظرف جو کسی پتلی خٹے سے بنایا گیا ہے مخروطی شکل کا ہے اس کا اس نیچے وار اور محور انتصابی ہے۔ اس کو مانع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کا سر بند کر دیا گیا ہے اگر اس کو اپنے محور کے گرد یکساں رفتار سے گھمایا جائے تو کسی نقطہ پر کے صدری تناؤ معلوم کرو۔

۸۔ ایک کر دی پچکار لفافہ کے گرد اور اس کے اندر ہوا ہے جو کرہ ہوائی کے دباؤ (۳) پر ہے۔ اس کے اندر ہوا کی مساوی مقدار داخل کر دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ لفافہ کے کسی نقطہ پر کا تناؤ  $\frac{2}{3} (3 - 2)$  / ۲ ہو جاتا ہے جہاں ابتدائی اور انتہائی نصف قطر کو  $r$  و  $r'$  بقیر کرتے ہیں۔

۹۔ ایک پچکار کر دی لفافہ میں جس کا قدرتی نصف قطر  $r$  ہے ہوا داخل کی گئی ہے جس سے اس کا نصف قطر بڑھ جاتا ہے پھر اس کو ایک قابضہ میں جس میں سے ہوا خارج کر دی گئی ہے رکھ دیا گیا ہے جس سے اس کا نصف قطر  $r'$  ہو جاتا ہے۔ ہوا کی مقدار معلوم کرو جو اس میں داخل کی گئی ہے۔ یہ فرض کر لیا جائے کہ تناؤ سطح کے اضافہ کے متناسب ہے۔

۱۰۔ نصف قطر کا ایک پچکار کر دی لفافہ ہوا سے بھر دیا گیا ہے جس کی تپش (ت) اور دباؤ  $p$  وہی ہیں جو گرد کی ہوا کے ہیں۔ تناؤ سطح کے اضافہ کے متناسب ہے اور اگر اندرونی ہوا کی مقدار دو چند کر دی جائے تو نصف قطر  $r$  ہو جاتا ہے اور پھر اگر اندرونی تپش کو  $t'$  تک بڑھا دیا جائے تو نصف قطر  $r'$  ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ن^2(ن-۱)(۲-ن)}{(۱-۲م)^2} + ۲ن = \frac{ن^2}{ن}$$

۱۱۔ نصف قطر کے نصف کروی قھیلے کو اس کی کور سے تھا کر پانی سے بھر دیا گیا ہے۔  
ثابت کرو کہ لاگہرائی پر صدی تناؤں میں یہ نسبت ہوگی

$$لا + لا + لا : لا : لا + لا + لا - لا$$

یہ بھی معلوم کرو کہ افقی تناؤ کہاں صفر ہو جاتا ہے اور قھیلے کے ایک حصہ پر اس کے منفی ہونے کے کیا اسباب ہیں۔

۱۲۔ ایک نصف کروی قھیلے کا مرکز ایک استوار مستوی سے، جو اس کی کور پر باندھ دیا گیا ہے بند کر دیا گیا ہے اور پھر اس کو اوںدھا کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ لاگہرائی پر صدی تناؤں میں یہ نسبت ہوگی

$$۳-۱ : لا : ۹-۱ : لا$$

۱۳۔ نصف قطر کا کروی نفاذ ث کثافت کے مانع سے عین بھر دیا گیا ہے۔  
یہ نفاذ ایک قطر کے گرد یکساں زاوی رقتار سے گھوم رہا ہے۔ جاذبہ کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ گردش کے محور سے زاوی فاصلے ذ پر صدی تناؤ یہ ہیں

$$\frac{۱}{۲} ث سمۃ و آجبۃ ذ اور \frac{۳}{۲} ث سمۃ و آجبۃ ذ$$

۱۴۔ محدود موٹائی کا ایک استوانی خول ایسی اادی شے سے بنایا گیا ہے جس کا ایک ڈیڑا ایک مربع سطح کا بغیر ٹوٹنے کے تناؤ سے سنبھال سکتا ہے۔ اگر یہ خول دائرونی سیالی دباؤ کے زیر عمل ہو جو استوانہ کو توڑنے کے عین ناکافی ہے تو ثابت کرو کہ

$$ھ = \frac{۱}{۲} ث لوک \quad \text{جہاں خول کے بیرونی دائرونی نصف قطر ۱ اور ب ہیں۔}$$

۱۵۔ ایک مخروط میں وزن دار مانع ہے۔ اگر کمونوں کی سمت میں تمام نقطوں پر مخروط کا تناؤ دہی ہو تو ثابت کرو کہ مانع کی کثافت، اس کے اوپر اس کے ارتفاع کے مربع کے تناسب معکوس میں ہے۔

۱۶۔ ایک محذب امتداد ناپذیر مائع نفاذ گردشی سطح کی شکل کا ہے اور اس کے گردش کا محور انتصابی ہے۔ یہ نفاذ اندر سے آبی دباؤ کے زیر عمل ہے۔ ثابت کرو کہ نصف النہاروں کی سمت میں سب سے چوڑے حصہ پر کا تناؤ اعظم یا اقل ہوگا۔ بوجہ اس کے کہ یہ تناؤ نصف النہاروں کے عمود و ارتناؤ سے کم یا زیادہ ہو۔

۱۷۔ قائم مستدیر مخروط کی شکل کا ایک مائع تھیلہ مائع سے عین بھر دیا گیا ہے اور اس کے قاعدے کی کور ایک استوار مستوی۔ کے ساتھ مثبت کر دی گئی ہے۔ قاعدے کے مرکز سے داغ قوتیں مائع پر عمل کرتی ہیں جو ایسے بدلتی ہیں جیسے فاصلہ۔ کسی نقطہ پر صدری تناؤ معلوم کرو۔

اگر استوار مستوی میں ایک سوراخ کر دیا جائے اور اس میں فشارہ لگا دیا جائے اور پھر اس فشارہ پر ایک ضرب لگائی جائے تو کسی نقطہ پر صدری دباؤ تناؤ معلوم کرو۔

۱۸۔ اگر دھند (۱۵۱) میں، ظرف مکانی نما کی شکل کا ہو اور اس کے مرکز سے گزرنے والی افقی تراش کے ہر نقطہ پر صدری تناؤ مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ محور کا طول وتر خاص کا  $\frac{5}{8}$  ہوگا۔

۱۹۔ مائع کی کچھ مقدار جو ایک پتلے کر دی خول میں ہے انتصابی قطر کے گرد یکساں زاویوں سے گھوم رہی ہے۔ کسی نقطہ پر صدری تناؤ معلوم کرو اور گھومنے کی رفتار میں اضافہ کے اثرات کی جانچ کرو۔

۲۰۔ ایک مائع سطح اس قسم کی ہے کہ اس کے کسی نقطہ پر کا تناؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے اور جس کی شکل مساوات  $y = f(x)$  سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ سطح سیال کے زیر عمل ہے۔ کسی نقطہ پر کے دباؤ کو تناؤ کے ساتھ جو نسبت ہے اس کو معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ یہ نسبت سطح  $m = 3$  یا  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  کے ایسے نقاط پر  $1:3$  ہے جہاں  $\frac{1}{2} = m$  یا  $\frac{1}{2} = y$

۲۱۔ ایک قائم مستدیر اسطوانہ چکدار مادے سے بنایا گیا ہے اور اس کے سرے استوار مستویوں کے ساتھ لگا دئے گئے ہیں اس کو سیالی دباؤ سے منایا گیا ہے۔ یہ مانکر کہ نصف النہار می اور دائری تراشوں میں تناؤ ہک کے کلیہ (Hooke's law) کے تابع ہیں ایسی مساواتیں معلوم کرو جو اسطوانہ کی اختیار کردہ شکل کو پوری طرح معین



کرنے میں کافی ہوں۔ اگر دباؤ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ نصف انہاری منحنی ہے

$$1 + \left( \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{2} \right)$$

جہاں ابتدائی نصف قطر لا، لچک کا ایک مقیاس لا، اور مکمل کے مستقل  
(اب اج ہیں۔

۲۲۔ ایک لچکا ر چلی جبکہ وہ تہی ہوئی نہ ہو نصف قطر کے اسطوانے کی منحنی شکل اختیار کرتی ہے۔ اگر اس کے سر سے ثابت کر دئے جائیں اور اس میں ہوا داخل کی جائے اور پھر اس کے سر سے بند کر دئے جائیں تو ثابت کرو کہ محور میں سے گزرنے والی کسی تراش کو محدود کرنے والا منحنی مساوات

$$(1 + f) \left( \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{2} \right) = (1 - f) \left( \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \right)$$

سے حاصل ہوگا۔ جہاں  $f$  وہ زاویہ ہے جو تماس محور کے ساتھ بناتا ہے۔ محور پر کا عموداً، بیرونی دائرونی دباؤں کا فرق  $d$ ، اور لچک کی شرح  $L$  ہے۔ مستقل  $f$  تک اور ایک تیسرے مستقل جو مساوات کے مکمل سے حاصل ہو کس طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

۲۳۔ ایک ظرف مہین طاقم اور امتدادنا پذیر ماوہ سے بنایا گیا ہے۔ اس کی شکل ایسی سطح کی ہے جو ایک زنجیرہ (Catenary) کو جبکہ تبدیل ک ہے اپنے محور کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے۔ اگر محور سے لافاصلہ پر صدری تناسلات  $t$  ہوں تو ثابت کرو کہ

$$t - t : t = \frac{L}{k} : \text{جہز } \frac{L}{k}$$

جبکہ یہ فرض کر لیا جائے کہ اندرونی و بیرونی دباؤں کا فرق مستقل ہے۔

(۱۵۹)

۲۴۔ اگر ایک طاقم ظرف جس کی تکوین، خط تدویر کو اپنے قاعدے کے گرد گھمانے سے ہوئی ہے مانع سے عین بھرا ہوا ہو جو بغیر کسی بیرونی قوتوں کے عمل کے محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو تو ثابت کرو کہ نصف انہاری

منحنیوں کی سمت میں اور ان کے علی القوائم سمت میں تناؤں کی نسبت ۲: ۱ ہے۔  
یہ مان لیا گیا ہے کہ دباؤ محور پر صفر ہو جاتا ہے۔

۲۵ — ایک کامل طور پر ملامت ظرف کی تکوین خطہ دیر کو اپنے محور کے گرد گھمانے سے ہوئی ہے اس کا محور انتصابی ہے۔ اگر ظرف بانی سے تقریباً بھرا ہوا ہو تو ثابت کر دو کہ ایسے نقطہ پر کا افقی تناؤ جہاں مماسی مستوی، افق کے ساتھ ۵۴° کا میلان

رکھا ہے زیر ترین نقطہ پر کے تناؤ کا  $\frac{23}{96} - \frac{23}{128}$  ہے۔ ظرف بالکل

بھرا ہوا کیوں نہ ہونا چاہیئے۔

۲۶ — مانع کے لئے ایک ظرف اس طرح بنایا گیا ہے۔ ایک بے وزن تختی کے ساتھ، کیڑے کا ایک ملامت ٹکڑا جس کی شکل نیم قطر و کے کرہ کے منطقہ کی ہے لگا دیا گیا ہے اس کیڑے کی ایک مستوی تراش تختی پر ٹھیک آ جاتی ہے اور دوسری کرہ کے مرکز میں تھکے گزرتی ہے۔ اس ظرف کو بڑی تراش کی کور سے تھام کر غیر متجانس مانع سے بھر دیا گیا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے  $y = (1 - x^2)^{1/2}$  جہاں  $y$  گہرائی ہے۔ صدری تناؤ کی نسبت معلوم کرو۔

۲۷ — ایک امتداد نا پذیر ملامت لفظ کی شکل گردشی مکانی مناد (دو ترخاص م و) کی ہے۔ یہ لفظ ک نصف قطر کے ایک ثابت افقی دائرہ سے لٹک رہا ہے۔ اس میں کثافت کا سیال ہے جو لفافے کے انتصابی محور کے گرد زاویائی رفتار

(ج/۲ ب) سے گھوم رہا ہے۔ ثابت کرو کہ لفظ کے کسی نقطہ پر محور سے

ر فاصلہ پر افقی تناؤ ہوگا

$$\frac{\rho \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right\}}{\frac{1}{2} (a + b)} \left[ \frac{1}{2} (a + b)^2 - (a + b)^2 \right]$$

۲۸ — ایک ملامت جہلی گردشی سطح کی شکل کی ہے نصف التہاری منحنی اس طرح کا ہے کہ کسی نقطہ پر کا عماد، نصف قطر احناء کا ن گھنا ہے۔ جہلی کو مانع سے عین بھر دیا

کیا ہے، پورا نظام ٹھوس جسم کی طرح محور کے گرد یکساں زاویہ رفتار سے گھوم رہا ہے  
 اگر مائع بہاؤ بیرونی قوتیں عمل نہ کریں اور محور پر دباؤ صفر ہو تو ثابت کرو کہ  
 کسی نقطہ پر صدی تناؤ کی نسبت  $m - n$  :  $1$  ہوگی۔

————— ۲۴۷ —————



نقطہ ق پر کے اعمال ت + م ف ت ، ل + م ف ل ، گ + م ف گ ہیں۔  
 فرض کرو کہ ت ق پر مقعر جانب سیالی دباؤ د م ف س ہے اور  
 فرض کرو کہ نقطہ ل پر کے ماس سے نقطہ ت پر کے ماس کا انصراف ف ہے  
 تب نقطہ ت پر کے ماس اور عماد کے متوازی قوتوں کو تسلسل کرنے سے  
 اور معیاروں کو ن کے گرد لینے سے ہمیں یہ مساواتیں حاصل ہونگی

$$\text{م ف ت} + (\text{ل} + \text{م ف ل}) \text{م ف ف} + \text{د م ف س} = \frac{\text{م ف ف}}{۲} \quad ،$$

$$\text{م ف ل} - (\text{ت} + \text{م ف ت}) \text{م ف ف} + \text{د م ف س} = \quad ،$$

$$\text{م ف گ} - (\text{ل} + \text{م ف ل}) \text{م ف س} + (\text{ت} + \text{م ف ت}) \frac{\text{م ف س}}{۲} = \text{م ف ف}$$

$$- \text{د م ف س} = \frac{\text{م ف س}}{۲}$$

(۱۶۱)

یا، انتہائیں

$$\frac{\text{ف ت}}{\text{ف ف}} + \text{ل} = \quad ،$$

$$\frac{\text{ف ل}}{\text{ف ف}} - \text{ت} + \frac{\text{د}}{\text{ف ف}} = \frac{\text{ف س}}{\text{ف ف}} \quad ،$$

$$\frac{\text{ف گ}}{\text{ف ف}} - \text{ل} = \frac{\text{ف س}}{\text{ف ف}} \quad ،$$

اگر پترے کی شکل دی گئی ہو یعنی اگر سنخنی ل ن کی ذاتی مساوات دی گئی  
 ہو اور اگر د ، ف کا معلومہ تفاعل ہو تو ان مساواتوں سے کسی کمون کے ساتھ  
 ساتھ عمل کرنے والے دور کا تعین ہو سکتا ہے۔

۱۵۷۔ مستوی پتر۔ اگر پتر الجکدار ہو اور قدرتاً مستوی ہو تو ہمیں ایک زاید  
 شرط حاصل ہوگی اور وہ یہ کہ گ انخنا کے متناسب ہو گا یعنی گ = ع / ر

جہاں نقطہ ن پر کا نصف قطر انخلاء ہے۔  
اس صورت میں تیسری مساوات ہو جائیگی

$$ل ر = \frac{ع}{ر} - \frac{ع}{ر فرغ}$$

اور اس لئے پہلی مساوات سے

$$فرغ = \frac{ع}{ر} - \frac{ع}{ر فرغ}$$

اس طرح

ت = ک -  $\frac{ع}{ر}$  ، جہاں ک مستقل ہے۔

دوسری مساوات میں ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$\frac{ع}{ر} - \frac{ع}{ر فرغ} = \frac{ع}{ر} - \left( \frac{ع}{ر فرغ} \right) + ک - \frac{ع}{ر} = در$$

اس مساوات سے پترے کی اختیار کردہ شکل کا تعین ہو جائے گا  
جبکہ دباؤ کا قانون دیا گیا ہو اور یا دباؤ کا قانون معلوم ہو جائے گا جبکہ اختیار کردہ  
شکل دی گئی ہو۔

ایسی صورت میں جبکہ د مستقل ہو یا ر کا ایک دیا ہو تفاعل ہو تو

( $\frac{فرغ}{ر}$ ) = سی رکھنے مساوات بالا کا پہلا تکمیل حاصل ہو سکتا ہے اور اس طرح ہم

$\frac{فرغ}{ر}$  کو ر کی رقوم میں معلوم کر لیتے ہیں۔

۱۵۸ — اگر قدر ثابۃ تزدی ہوئی اسطوائی شکل کا ہو اور اس کو قدرتی شکل سے  
جھکایا جائے تو جنت گ جو چھکاؤ کا جنت ہے انخلاء کے تقیر کے متناسب

(۱۶۲)

ہوگا۔ اس طرح اگر ن پر صدری نصف قطر انخلاء ہو تو

$$ک = ع \left( \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر فرغ} \right)$$

اس مساوات کی صداقت اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ اوسط ایشیہ کا طول کمونوں کے علی القوا کم غیر متغیر رہتا ہے۔ ہم نے یہ بھی مان لیا ہے کہ بیرونی سیالی دباؤ کے وجود سے مساوات پر کسی قسم کا اثر نہیں ہوتا۔

۱۵۹ — ناقصی اسطوانہ۔ ان مساواتوں کے استعمال کی توضیح کے لئے

ہم ناقصی اسطوانہ کی صورت پر غور کرتے ہیں جو کسی پتلی استوار سے بنا ہوا ہے سروں پر بند ہے اور ہوا سے بھرا ہوا ہے جس کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر د کے زیادہ ہے۔

لی کو سا قضا کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{F}{A} = \frac{P}{A} + \frac{P}{A}$$

مزدوج محور کے ایک سرے سے س اور ذ کو ناپنے سے

$$R = \frac{J}{A} - \frac{J}{A} = \frac{J}{A} - \frac{J}{A}$$

اور، مبدلوں کو بدلنے کے طریقہ سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$T = D \left( \frac{J}{A} + \frac{J}{A} \right) + \frac{J}{A} + \frac{J}{A}$$

$$L = \frac{J}{A} - \frac{J}{A} = \frac{J}{A} - \frac{J}{A}$$

تشاکل کی رو سے اور نیز عمل و رد عمل کے مساوی ہونے کے کلیہ کو استعمال کرنے سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ادجین ( Apes ) پرل صفر

ہو جاتا ہے یعنی جبکہ  $F = 0$  اور جبکہ  $F = 0$ ۔

پس یہ معلوم ہوگا کہ  $A = 0$  اور  $B = 0$  اور اس لئے

$$ت = \frac{د ا ب}{ج د} \text{ اور } ل = - \frac{د ا ب}{ب ا} \text{ ج د جب ذ جرم ذ}$$

$$\text{نیز } \frac{ف ر گ}{ف ر ذ} = ل ر = - \frac{د (ا ب) (ب ا)}{(ا ج ب ذ + ب ا ج م ذ)^2}$$

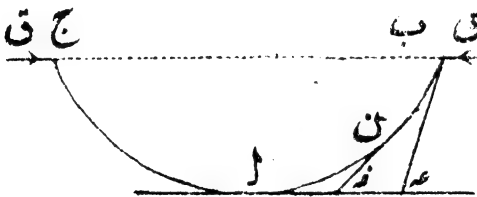
$$گ = \frac{۱}{۲} د (ا ج ب ذ + ب ا ج م ذ + \frac{ب ا}{ب ا} + \text{مستقل})$$

$$= \frac{۱}{۲} د (ج د ا + \text{مستقل})$$

$$\text{اس طرح } گ - گ = \frac{۱}{۲} د (ج د ا - ج د ا)$$

۱۴۰ - ثوبیہ - (۱۶۲)

سم کے دفعہ (۱۳۴) میں یہ بتا دیا ہے کہ ثوبیہ اور لدنیہ متماثلہ وہی منحنی ہیں۔  
اگر ایک پتلی جگہ دار تختی کے مقابل کے کناروں کو ایک دوسرے کی طرف  
کھینچ کر ایک چست یا تنی ہوئی چادر کے ذریعہ ملا دیا جائے تو معنی پیدا شدہ دفعہ  
(۱۳۴) کا ثوبیہ ہو گا۔



اس صورت میں د = ۰ اور مشق کے طور پر یہ دیکھ لینا مفید ہو گا کہ دفعہ (۱۵۶)  
کی مساوات کے تکمیل سے ثوبیہ کی ذاتی مساوات حاصل ہوتی ہے۔  
اگر ملانے والی چادر کا تناؤ ق ہو اور ن پر کا تناؤ اور جزئی قوت  
علی الترتیب ت اور ل ہوں تو پتھر کے حصہ ن ب کے توازن پر  
غور کرنے سے یہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں



ت = ق جمذ، ل = ق جبذ

۱۶۱۔ ایک پتلا چمکدار پتھر اور دو متوازن سی ثابت سلاخوں پر رکھا ہوا ہے۔ اس پر دباؤ ڈالکر اس کو ثوبیہ کی شکل میں تبدیل کرنا مقصود ہے۔ دباؤ کا قانون معلوم کرو۔ مقادیر ت اور گ دونوں ان خطوں پر صفر ہو جائے تیں جہاں ان کو مس کرتے ہیں۔ اور اس لئے ان خطوں پر نصف قطر انحناء مٹنا ہی ہوگا۔ پس مساوات

تیک -  $\frac{ع}{۲۲}$

۴۲  
میں ہم دیکھتے ہیں کہ ک = . اور اس لئے

$$\frac{2}{52} = 0$$

توبیہ کی ذاتی مساوات ہے

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

اور وہاں مسابقتیں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ع}{۵۳} - \left( \frac{فر}{فره} \right) \frac{ع}{۴} - \frac{فر}{فره} \frac{ع}{۳} = د$$

(۱۶۴) عمل اندراج سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$\frac{ع.م.ع}{2} = 2$$

اب ثوبیہیں، دفعہ (۱۳۴)

$$\frac{2}{5} = 0.4$$

و = نلی \* عجم

اس طرح

اور اس لئے مطلوبہ دباؤ، ث کثافت کے مائع کو ڈالنے سے حاصل ہو سکتا ہے

ایسا کہ  $\text{ع جم ع} = \text{ج ث م}$

پس ثوبیہ کی شکل مساوات بالا سے حاصل شدہ کثافت کے مائع کو سلاخوں کی ہموار سطح تک ڈالنے سے برقرار رکھی جاسکتی ہے۔

مزید براں  $\text{ل} = \frac{\text{ع}}{\text{ر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{ف}} = \frac{\text{ع}}{\text{م}} \times \text{ج ث م}$  جب ف

$\text{ل} = \frac{\text{ع}}{\text{ر}} \times \text{ج ث م} \times \text{ج ب ف قطع}$

جہاں بانیں طرث کے حصہ کی، دائیں طرث کے حصہ پر جزی می قوت لی ہے جو نقطہ ث پر اندر کی طرث عمل کرتی ہے۔ اس طرح - لی بانیں طرث کے حصہ پر کے عمل کو تعبیر کرتا ہے۔

اس لئے ب اور ج یر

- لی = ج ث م مس ع

اس آخری نتیجہ کی جانچ اس امر کے معائنہ سے ہو سکتی ہے کہ سلاخوں کے تعامل مائع کے وزن کو تھامتے ہیں۔

اس طرح

- ۲ جم ع = ۲ ج ث ن ل فر

- ۲ ج ث ن ل = ۲ ج ث ن ل  $\times \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فر}}$

- ۲ ج ث م ۲ جم ف فر = ۲ ج ث م جب ع

۱۶۲۔ اگر ایک دئے ہوئے پتھرے کو موڑنے سے لدنیہ حاصل کیا جائے اور سرے پر گئے کوٹوں کو ایک ہی افقی مستوی میں ثابت کر دیا جائے تو ب

اور ج پر گ =۔ اور ہر سرے پر کا زور ماسی اور عمادی اجزاء ترکیبی پر مشتمل ہوگا۔ اب اگر ہم اس خاص لدنیہ کے موزوں کثافت کا مانع اندھلتے جائیں تو اس کی شباهت غیر متغیر رہے گی لیکن ب اور ج پر ت کی قیمت بڑھائیگی اور ل غیر متغیر رہے گا۔

## امثلہ

(۱۳۵)

۱۔ پتلے استوار مادہ سے بنا ہوا ایک ظرف جو مستد یا اسطوانہ کے نصف حصہ کی شکل کا ہے پانی سے بھردیا گیا ہے اور انتصافی قوتوں سے جو اس کو محدود کرنے والے افقی کمبوں پر عمل کرتی ہیں تھما گیا ہے ثابت کرو کہ زیر ترین نقطہ سے ذہ فاصلہ پر کے نقطہ پر زور ہونے

ایسے کہ ۲ ت - ج ث لا (ذ جب ذ + جم ذ) ۲ ل = ج ث لا ذ جم ذ

گ = ج ث لا (۲ - ذ جب ذ - جم ذ)

۲۔ ایک پترا استوار مکانی اسطوانہ کی شکل کا ہے جو کمبوں پر علی القوائم سطویں سے محدود ہے۔ اس کو ایک ظرف کی طرح استعمال کیا گیا ہے اور ہمیں کپڑے کی ایک پٹی سے جو در خاص کے سروں میں سے گزرنے والے کمبوں کو ملاتی ہے اس کو بند کر کے اس میں ہوا بھر دی گئی ہے جس کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر د کے زیادہ ہے۔ اگر پٹی کے عرض کو در خاص (م د) کے ساتھ نسبت ۲ : ۲۱۱ : ۴ ہو تو اس پر کے ماس سے ثاب کر ثابت کرو کہ

ت = د لا (ت ف - ۲۱۱ جم ذ) ل اور گ کی قیمتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ د ل

گ = د لا (۳ + ۲۱۱ ۲۱۱)

۳۔ ایک استوار اسطوانہ کی ظرف کی اندرونی ہوا کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے زیادہ ہے۔ ان کی عمودی تراش دو مستد ویری خطوط کی قوسوں سے بنی ہے جن کے سرے ایک دوسرے پر ٹھیک۔ میٹھے ہیں کسی کمب پر گے زور دریافت کرو۔

۴۔ ایک استوار ہمیں پترا اسطوانہ کی شکل کا ہے جس کی عمودی تراش نہ خیرہ

س = ک مس ذ ہے۔ اس پترے کے مقعر حصہ پر ہوا کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر د کے زیادہ ہے اور پتر زنجیرہ کے محور کے متوازی دو مساوی قوتوں سے تھا گیا ہے۔ یہ قوتیں راس سے زاوی فاصلہ پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ت}{دک} = \text{جم ذ قطع} - ۱ + \text{جب ذ لوک مس} \left( \frac{پ}{ق} + \frac{ق}{پ} \right)$$

$$\frac{لی}{دک} = \text{جب ذ قطع} - \text{مس ذ} - \text{جم ذ لوک مس} \left( \frac{پ}{ق} + \frac{ق}{پ} \right)$$

$$\frac{گک}{دک} = \text{قط ذ قطع} - \frac{۱}{۲} \text{قط ذ} - \frac{۱}{۲} \left\{ \text{لوک مس} \left( \frac{پ}{ق} + \frac{ق}{پ} \right) \right\} + ک$$

$$\text{جہاں ک} = \frac{۱}{۲} \left\{ \text{لوک مس} \left( \frac{پ}{ق} + \frac{ق}{پ} \right) \right\} - \frac{۱}{۲} \text{قط ذ}$$

نیز ثابت کرو کہ تھانے والی ہر قوت

$$= \text{دک لوک مس} \left( \frac{پ}{ق} + \frac{ق}{پ} \right)$$

۵۔ ایک مستوی لچکدار پتر دو متوازی افقی ڈنڈوں پر ٹکا ہوا ہے اوپر کی ہوا کے مستقل دباؤ سے اس کو ڈنڈوں کے درمیان نیچے کی طرف موڑا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نصف قطر انحناء اور انحراف مساوات

$$\left( \frac{فرق}{فرق} \right)^2 = ک - \frac{۲}{۳} - \frac{۲۲}{۳} \frac{د}{ع}$$

سے مربوط ہونگے۔

۶۔ دباؤ کا کلیہ معلوم کرو جو اس پترے کو زنجیرہ کی شکل میں جھکا دے۔

۷۔ اگر اسی پترے کو ایک مکانی اسطوانے کی شکل میں جھکا دیا جائے تو ثابت کرو کہ راس سے زاوی انحراف ذ پر سیالی دباؤ ایسے بدلتا ہے جیسے

$$\text{جم ذ} (۷ - \text{جم ذ} - ۶)$$

(۱۶۶)

# باب

## قوت شعری

۱۶۳۔ یہ ایک مشہور بات ہے کہ اگر چھوٹے سوراخ کی ایک شیشیہ کی نلی پانی میں ڈبو دی جائے تو نلی کے اندر پانی کی سطح بیرونی پانی کی سطح سے اونچی ہو جاتی ہے۔

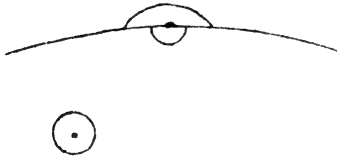
یہ بات بھی اتنی ہی مشہور ہے کہ اگر نلی پارہ میں ڈبو دی جائے تو اندرونی پارہ کی سطح بیرونی پارہ کی سطح سے نیچی ہوگی۔ اگر شیشیہ کے آبخورے میں پانی ہو تو اس کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ خط تماس برائے سطح کا استخا اوپر وار ہے اور یہ شیشیہ کو ایک خاص زاویہ پر جمی ہوئی نظر آتی ہے۔

اگر آبخورے کو احتیاط سے پورا بھر دیا جائے تو پانی کی سطح آبخورے کی جوئی یا سر کے مستوی کے اوپر تک چڑھ جائے گی اور پانی سر کے گول کنارے کے اوپر ابھرا ہوا دکھائی دینگا۔

اگر میز پر پانی گر جائے تو اس کے حدود معین ہوتے ہیں اور منحنی کنارے میز سے چمٹے ہوئے ہوتے ہیں۔

ان واقعات اور ان کے مثل دوسرے اور بہت سے واقعات کی توجیہ آن قوتوں کے وجود سے ہوتی ہے جو سیالوں کے خود سالمات کے درمیان اور نیز ٹھوس اور سیالوں کے سالمات کے درمیان عمل کرتی ہیں جبکہ ٹھوس اور سیال ایک دوسرے سے تماس رکھتے ہوں۔ کسی خاص

سامہ کی قوت کے عمل کا میدان لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔ اور چونکہ یہ سالمی قوتیں بہت چھوٹے چھوٹے فاصلوں پر عمل کرتی ہیں، اس لئے جہاں تک کہ سالمی قوتوں کا تعلق ہے متجانس جسم کا ہر عنصر بشرطیکہ وہ جسم کو محدود کرنے والی سطح کے نزدیک نہ ہو ایک ہی قسم کے حالات کے تحت ہوگا۔ لیکن خود سطح پر کسی خاص سامہ کا کرہ عمل نامکمل ہوگا اور یہ سامہ محدود کرنے والی سطح کے بیرونی جانب جس قسم کے مادہ کے سالمات ہوں ان کے میدان عمل میں آ جائیگا۔



اختما کے لا انتہا چھوٹے ہیں تو جہاں تک سالمی قوتوں کا تعلق ہے دو متجانس اشیاء کی سطح حاصل کے تمام حصے ایک ہی قسم کے حالات کے تحت ہونگے۔ سطحی توانائی بالقوہ

(۱۶۷)

جو سالمی قوتوں کے باعث پیدا ہوگی وہ سطح کے رقبہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھگی یہ مستقل تناسب رکھنے والی اشیاء کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔

۱۶۴۔ ایک متجانس مائع ایک طرف میں جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے اس صورت پر اصول توانائی کا استعمال ہے۔

توازن کی صورت میں توانائی بالقوہ کی قیمت ساکن یا اجل ہونی چاہیے۔

۱۶۵۔ وہ میدان جس میں شعری قوتیں عمل کرتی ہیں لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے (Quincke) نے ایک شیشے کی نلی میں جس پر چاندی کا ۵۴۲۰۰۰ ڈی میٹر) موٹا لپٹا تھا پانی ڈالکر تجربہ کیا اور پھر اسی نظر کی چاندی کی نلی میں پانی ڈالکر تجربہ کیا۔ ہر صورت میں ایک ہی قسم کے مظاہر مشاہدے میں آئے

Pogg Ann. CXXXIX (1870). p. 1.

Mathieu, Theorie de la capillarite, 1883.

۱۶۶۔ قوت شعری کے نظریہ کی یہ بحث

سے لی گئی ہے۔

یہ توانائی باقوہ چار حصوں پر مشتمل ہوگی یعنی ثقلی توانائی، کشائی توانائی، فرلا فرما فری جہاں عنصر فرلا فرما فری کا ارتقاعی ہے، اور فاصل سطحوں کی توانائیاں جو (ع) مانع اور ہوا (ب) مانع اور ظرف (ج) ہوا اور ظرف کو جدا کرتی ہیں۔  
پس یہ عنصر وی ہے کہ

کشائی فرلا فرما فری + (س) + (ب) + (ج) + س  
ساکن ہو جہاں س، س، س سے با ترتیب سطحیں (ع) (ب) (ج) اور (س) ج سے ان کی توانائیاں فی اکائی رتبہ تقبیر ہوتی ہیں، اس سلسلہ کے تابع کہ حجم کشائی فرلا فرما فری مستقل رہتا ہے۔

مانع اور ہوا کی درمیانی سطح فاصل س کے خفیف ہٹاؤ کی صورت میں اگر سطح س کے عماد کے عنصر کو مفعول تقبیر کرے جو س کے قدیم اور جدید محلوں میں اسکے متناظر عناصر کے درمیان واقع ہے تو پہلی رقم کا نتیجہ حارج کشائی مفعول فرس ہوگا۔

اولاً فرض کرو کہ مانع جس خط پر ظرف کو مس کرتا ہے وہ نہیں بدلتا اس صورت میں س اور س مستقل رہیں گے اور س بدلے گا۔ س کے ایک ایسے عنصر فرس، فرس پر غور کرو جو خطوط انحناسے محدد ہے۔ اس عنصر کے

یہ ممکن ہے کہ مانع کی کثافت، سطح کے لا انتہا نزدیک سالمی عمل کی وجہ سے بدلتی ہو لیکن چونکہ متغیر کثافت کی بدلتی ہوئی بمقابلہ مفعول کے لا انتہا چھوٹی ہوگی اس لئے استدلال کو متاثر کئے بغیر اس تغیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

حدود میں سے گزرنے والے عماد سطح سے کو عنصر قرس، فرس، میں قطع کرینگے اور اگر سہ، مہم، صدری نصف قطر اٹھا ہوں تو

$$\text{فرس}_1 = (1 - \frac{\text{مفع}_1}{\text{سہ}_1}) \text{فرس}_1 = (1 - \frac{\text{مفع}_2}{\text{سہ}_2}) \text{فرس}_2$$

$$(۱۶۸) \quad \text{فرس}_1 - \text{فرس}_2 = \text{فرس}_1 \text{فرس}_2 - \text{فرس}_2 \text{فرس}_1 = - (\frac{1}{\text{سہ}_1} + \frac{1}{\text{سہ}_2}) \text{مفع}_1 \text{فرس}_2$$

$$\text{یا} \quad \text{مفع}_1 \text{فرس}_2 = - (\frac{1}{\text{سہ}_1} + \frac{1}{\text{سہ}_2}) \text{مفع}_2 \times \text{فرس}_1$$

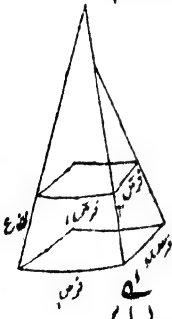
لیکن ہمیں مطلوب ہے

$$\text{ج ثا کی مفع}_1 \text{فرس}_1 + \text{مفع}_2 \text{فرس}_2 =$$

$$\text{یا یہ کہ کر } \{ \text{ج ثا ی} \} = (\frac{1}{\text{سہ}_1} + \frac{1}{\text{سہ}_2}) \text{مفع}_1 \text{فرس}_1 =$$

اس مشروطہ کے تحت کے حجم مستقل رہتا ہے یعنی کر مفع}\_1 \text{فرس}\_1 =

$$\text{کر } \{ \text{ج ثا ی} \} = (\frac{1}{\text{سہ}_1} + \frac{1}{\text{سہ}_2}) \text{مفع}_2 \text{فرس}_2 =$$



جہاں ن مستقل اور مفع اختیاری ہے۔

$$\therefore (\frac{1}{\text{سہ}_1} + \frac{1}{\text{سہ}_2}) \text{ج ثا ی} = (\text{ی} - \text{ن})$$

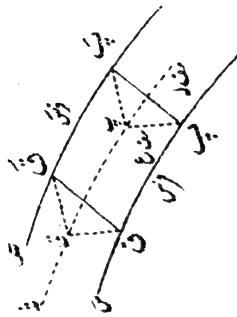
$$\therefore (\frac{1}{\text{سہ}_1} + \frac{1}{\text{سہ}_2}) = \text{د} + \text{مستقل}$$

$$\text{یعنی} \quad (\frac{1}{\text{سہ}_1} + \frac{1}{\text{سہ}_2}) = \text{د} - \text{ثا} = (۱)$$

ن مستقل کا ثا کے مساوی ہونا اس طرح ظاہر ہے کہ اگر سطحی دوائی لا صفر ہوتی تو دائی کے اندر کا دباؤ دائی اور ہوا کی سطح فاصل کے نزدیک کہہ دوائی کے دباؤ کے مساوی رہتا۔



جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ  $\pi$  اور مائع کی سطح کے عین اندر کا دباؤ د ہے اس سے معلوم ہوا کہ اثر وہی ہے گویا کہ سطح تناؤ کی حالت میں ہے اس طور پر کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ مستقل اور توانائی فی اکائی رقبہ کے مساوی ہے۔



ہے۔ اگر ہم خط  $s$  کے تمام نقطوں پر سطح  $s$  کے عماد کھینچیں تو یہ عماد سطح  $s$  کو خط  $z$  پر قطع کریں گے اور سطح  $s$  دو حصوں میں متقل خیال کیجا سکے گی۔ ایک  $ص$  جو خط  $z$  سے محدود ہے اور دوسرا  $ص$  جو خط  $z$  اور  $s$  کے درمیان ہے۔

گذشتہ کی طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$ص - س = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \text{مفع فرس}$$

(۱۶۹) اور اگر مفع  $z$  سے عناصر فرس، فرس کا درمیانی فاصلہ تبصر ہو تو  $ص$  کو سطح  $s$  پر بر طرف کی سطح کے عناصر مفع  $z$  فرس کا ظل تصور کیا جاسکتا ہے پس اگر سطح  $s$  اور سطح  $ص$  کے عمادوں کا درمیانی زاویہ  $\theta$  ہو تو

$$ص = r \text{ جم آ مفع لہ فرس}$$

$$\text{نیر مفع س} = \text{مفع س} = r \text{ مفع لہ فرس}$$

اب چونکہ توانائی بالقوہ ساکن ہے اس لئے

$$\text{مفع} \{ \text{ج ث کرری فر لا فرما فری} + \text{اس} + \text{ب س} + \text{ج س} \} = 0$$

اس شرط کے ماتحت کہ کیت مستقل ہے۔ یا

ج ث کر ای معن فرس + (ص + ص - س) + ب م س + ج م س =  
یا کر (ج م س) + (ص + ص - س) + ب م س + ج م س =  
اس شرط کے تحت کہ

کر م س فرس =

اور چونکہ معن لہ اختیاری ہے، اس سے مساوات (۱) حسب سابق حاصل ہوگی اور نیز

(ج م + ب - ج) = ۰

جہاں ہوگا جس کا یہ مطلب ہے کہ مانع اور ظرف کی سطحوں کا درمیانی زاویہ ان کے  
خط تقاطع پر مستقل رہتا ہے۔

۱۶۵ — متذکرہ بالا باتوں پر غور کرنے سے نیز تجربوں کے نتیجوں کی بنیاد دو کلیوں  
پر پہنچتے ہیں جن کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

(۱) اس مجدد و کرنے والی سطح پر (جو مانع اور ہوا کو جدا کرتی ہے) یا دو مانعات  
کے درمیان کی سطح حاصل پر سطحی تناؤ ہوتا ہے جو ہر نقطہ پر اور ہر سمت میں وہی ہوتا ہے  
(۲) گیس اور مانع کی سطح حاصل یا دو مانعات کی سطح حاصل ٹھوس جسم کو جس  
خط پر ملتی ہے اس خط اتصال پر اس سطح اور جسم کی سطح کے درمیان ایک خاص زاویہ  
بنے گا جو ٹھوس اور مانعات کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔

پانی اگر شیشے کے برتن میں ہو تو یہ زاویہ حادہ ہوتا ہے۔ پارہ کی صورت  
میں یہ زاویہ منفرج ہوتا ہے۔

(۱۵)

لہ شکل میں جو مانع اور ظرف کا خط تماس ہے اس کا عنصر فرس ن ق ہے اور خط تماس، ق کے  
متناظر عنصر ن ق ہے جس سطح ص کا عنصر ن ق ق ہے کیت کا تغیر جو پانی اور ظرف کے  
خط تماس کے اطراف فائدہ ناما عناصر ن ق سے تعبیر ہوتا ہے بقا بل باقی کیت کے اعلیٰ رتبہ  
کی صغیر مقدار ہے اور اس لئے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

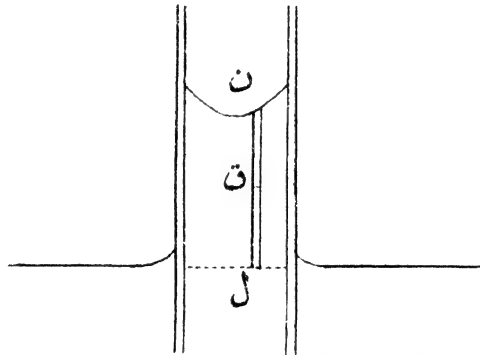
ان کیلوں کو مان کر ہم قوت شعری اور مانع جھیلوں سے متعلق مختلف مظاہر کی توجیہ کر سکتے ہیں۔

۱۶۶۔ دو تختیوں کے درمیان مانع کا چڑھاؤ۔

اگر سطحی تناؤ ت ہو اور مستقل زاویہ عم ہو جس پر مانع کی سطح پر تختی سے ملتی ہے اور جس کو ہم قوت شعری کا زاویہ کہیں گے اور اوسط چڑھاؤ تختیوں کا درمیانی فاصلہ د ہو تو، اکائی عرض کے مانع کے توازن پر غور کرنے سے

$$۲ \text{ ت جم عم} = \text{ج د ث ش د}$$

پس تختیوں کے درمیانی فاصلے کو گھٹانے سے مانع کا چڑھاؤ بڑھتا ہے۔



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کسی نقطہ ق پر کا دباؤ ل پر کے دباؤ سے بقدر ج ث × ق ل کے کم ہے

اور  $\therefore = \frac{\pi}{2} - \text{ج ث} \times \text{ق ل}$

اب چونکہ ن پر کرہ ہوائی کا دباؤ بیرونی سطح آب پر کے دباؤ کے تقرباً مساوی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عنصر ن ل کے وزن کو اس کے اوپر کے حدود کے سطحی تناؤں کا حاصل تھا ہے ہو کے ہے۔

۱۶۷۔ دائری نلی میں مانع کا چڑھاؤ۔

اس صورت میں مانع کے ستون کو وہ تناؤ تھا میگا جو ستون کے اوپر کے حدود کے گرد ہے اور اس لئے اگر اندرونی نصف قطر ہو تو

$$۲۲ رت جم ع = ج ث ۴ ژ ف$$

$$۲ ت جم ع = ج ث ر ف$$

یا

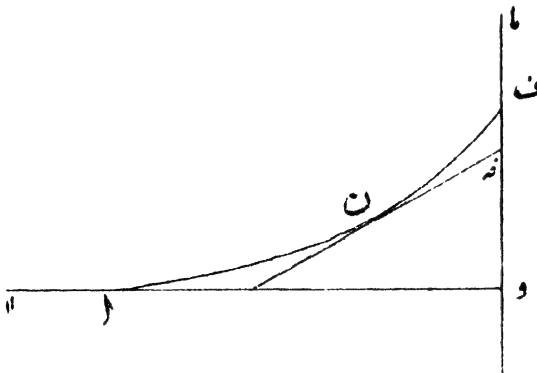
اس طور پر تھے ہوئے ستون کے کسی نقطہ پر کا دباؤ چونکہ کرہ ہوائی کے دباؤ سے کم ہو گا اس لئے اگر ستون کافی طور پر بلند ہو تو یہ دباؤ تناؤ کی حالت میں ختم ہو جائے گا مگر پھر بھی سیالی دباؤ کے اس کلیہ کی پابندی کریگا کہ ہر سمت میں دباؤ مساوی ہوتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ توانائی بالقوہ جو ستون کے صعود کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتی۔

۱۶۸۔ شعاری مخنی۔ شعاری مخنی وہ شکل ہے جو مانع انتصابی دیوار کے ساتھ

تماس میں اختیار کرتا ہے۔

ہم ایسی صورت پر غور کریں گے جس میں مانع اور دیوار کا زاویہ تماس حادہ ہو مثلاً جب پانی سیٹھے کی ایک انتصابی تختی کے ساتھ تماس رکھتا ہے۔



اگر انتصابی دیواروف ہو مانع کی قدرتی سطح و اکن میں سے گزرنے والی دیوار کے عمود وار تراشش کا نصف قطر احتراز اور سطحی تناؤ ت ہو تو دفعہ (۱۴۴) کی مساوات (۱) سے

$$\frac{ت}{ر} = ۲ - ۵ = ج ث ما$$

پس ۴ ت = ج ث ک ۲ رکھنے سے

$$\frac{۲ ک}{۴} = ر ما$$

اور دفعہ (۱۳۵) کی شکل کو الٹا دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ شعاری منحنی لدنیہ کی ایک خاص صورت ہے۔

یہ خاص صورت اس لئے ہے کہ و منحنی کا ماس ہے، پس فرما/فرلا = ۰ جبکہ ما = ۰

اور اس طرح کارڈینری مساوات حاصل ہو سکتی ہے شکل سے ظاہر ہے کہ فرلا/فرلا جو زاویہ (۱۴۲)

۲/۳ + ذکا ماس ہے منفی ہے اور تعداد اگھٹتا ہے، اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ فرما/فرلا مثبت ہے اور مساوات ۴ ر ما = ک ۲ ہو جاتی ہے

$$\frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱}{۲} \left[ \left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^۲ + ۱ \right] = \frac{۲ ک}{۴}$$

فرلا کی بجائے ع فرع رکھ کر مکمل کرنے سے [ع = فرلا/فرلا]

$$\frac{۱ - \frac{۲ ک}{۴}}{\frac{۱}{۲} (۲۶ + ۱)} = ۱ - \frac{۲ ک}{۴} \quad \therefore \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{۲ ک - ۲۶}{۲۶ - ۲ ک}$$

اب چونکہ ماس انتصابی ہوتا ہے جبکہ ما = ۲۶ ک اور چونکہ منحنی،

انتصابی مستوی کو حادہ زاویہ پر ملتا ہے اس لئے تمام نقاط زیر بحث پر ما = ۲۶

ک سے کم ہوگا اور

$$\frac{۲۱۲ - ۲ ک}{۲۱۲ - ۲ ماک - ۲} = \frac{فرلا}{فرما}$$

اس مساوات کے مکمل سے اور مبادا کو ایک نئے مقام پر لینے سے اس طرح  
پروکلا = جبکہ ما = ک حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا + ماک - ۲ ما = ک کوک}{ما}$$

$$\frac{ما}{ک} = \text{قطر اس}^۲ (لا + ماک - ۲ ما) \quad \{ \text{قطر} \approx [\text{Sech.}]$$

اگر ما = ۱، تو لا، لائنیا ہی ہوتا ہے اور دفعہ (۱۳۵) کی شکل لینے سے لدنیہ  
شعاری منحنی کے مثل ہو جاتا ہے جبکہ ب ج، ب اور ج پر ماس ہو لیکن یہ  
اُسی صورت میں ممکن ہے جبکہ طول بہت بڑا ہوا۔

اگر وہ زاویہ ہو جس پر مانع دیوار سے ملتا ہے تو ہم  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی بجائے  
معمور رکھنے سے ارتفاع و ف حاصل کر سکتے ہیں اس طرح

$$\frac{ک}{۲۱۲ - ۲ ک} = - \text{قمعہ}$$

$$\text{اور} \quad \frac{و ف = ک}{\left( \frac{۱۱}{۱۲} - \frac{۱۱}{۱۲} \right)}$$

ایسے مانع کی صورت میں جس کے لئے زاویہ تماس منفرج ہو (مثلاً  
پارہ) یہ بہتر ہو گا کہ ماکو نیچے وارنا پاجاے۔

۱۶۵ — ذاتی مساوات حاصل کرنے کے لئے قوس کو ف سے ناچو اور  
الضرف ذ کو ف سے۔ تو

$$\frac{ک}{۲۱۲} \frac{فر}{فرلا} = \frac{فرلا}{فرلا} = - \text{رجم ف}$$

(۱۶۴)

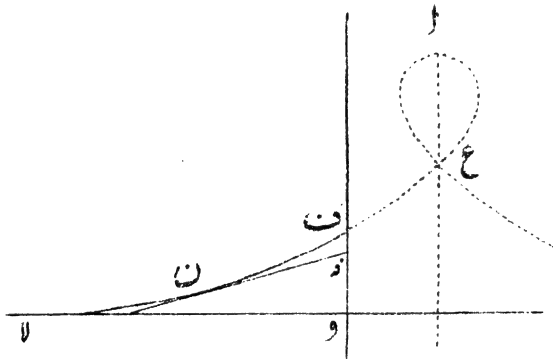
$$۱۔ \frac{ک^۲}{۲} = جب ف = \frac{فرس}{فرخ} = \frac{م}{جب} \left( \frac{ف}{۲} - \frac{پ}{۲} \right)$$

$$اور \frac{۲}{ک} = \frac{مس}{ک} = \frac{\left( \frac{ع}{۲} - \frac{پ}{۲} \right)}{\left( \frac{ف}{۲} - \frac{پ}{۲} \right)}$$

اگر قوس ث اور انصراف سسا کو بالترتیب ۱ اور ۱ پر کے ماس سے نامیں تو

$$جب ، ث = - \frac{پ}{۲} ، س = - (ف - ث)$$

$$اور جب ، ف = سسا - \frac{پ}{۲} ، س = - (ف - ث)$$



اور حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۲}{ک} = \frac{مس}{ک} = \left( \frac{سا}{۲} + \frac{پ}{۲} \right)$$

جودفعہ (۱۳۵) میں حاصل کی ہوئی مساوات ہے۔

۱۷۔ متوازی تختیاں۔ ایک ہی شے سے بنی ہوئی دو متوازی تختیوں کے

درمیان بائے کی سطح کی شکل جب تختیاں بائے میں جزو غرق ہوں۔

اس صورت میں محور و ما کو تختیوں کے درمیانی فاصلے کے وسط میں اور مبداء و کو نایع کی قدرتی سطح میں لینا اور انصراف فہ کو اپر کے تماس سے اپنا سہولت پیدا کرے گا۔ (۱۶۳)

گذشتہ صورت کی طرح

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

اور

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} \left\{ \left( \frac{۲}{۳} \right) + ۱ \right\} - \frac{۲}{۳}$$

اس لئے حاصل ہوگا

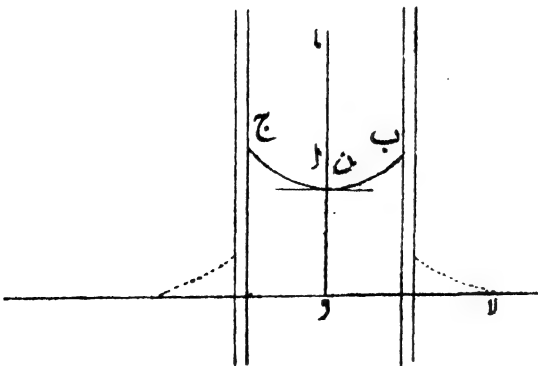
$$\frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} - \left\{ \left( \frac{۲}{۳} \right) + ۱ \right\} - \frac{۲}{۳} = \text{جم مذمہ جہاں مستقل ہے۔}$$

اس طرح م۔ جم مذمہ مثبت ہونا چاہیئے اور اسلئے  $۱ < ۱$

نیز

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$$





رکھو جم ف = ی اور م آ س / ک = ۶

- فزی

$$\therefore ۲ \text{ فرو} = \frac{\{ (۱-۱) (۲-۱) (۳-۱) \}}{\{ (۱-۱) (۲-۱) (۳-۱) \}}$$

ی = د + م / ۳ کے اندراج سے یہ ہو جاتا ہے

- فرو

$$\text{فرو} = \frac{\{ (۲-۱) (۳-۱) (۴-۱) \}}{\{ (۲-۱) (۳-۱) (۴-۱) \}}$$

$$\text{یا } ۶ = \frac{\{ (۲-۱) (۳-۱) (۴-۱) \}}{\{ (۲-۱) (۳-۱) (۴-۱) \}}$$

جہاں  $۳ = ۱ + ۲$ ،  $۴ = ۱ + ۳$ ،  $۵ = ۱ + ۴$ ،  $۶ = ۱ + ۵$

اس طرح  $۴ < ۳$ ،  $۵ < ۴$ ،  $۶ < ۵$

پس د = فھ (۶ + صہ) جہاں صہ مستقل ہے۔

(۱۰۵) اب ی یا جم ف، ا اور جب ع کے درمیان واقع ہوتا ہے جہاں ع قوت شعری کا زاویہ ہے۔

$$\therefore ۱ - ۳ / م < و < جب ع - م / ۳$$

$$\text{یا } ۴ < د < ۳ ع$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ فھ (۶ + صہ) ۱، ۲، ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتا ہے اس لئے صہ کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور سے کم ہونا چاہیئے۔ نیز د = ۴، جبکہ ف = ۱ یا ۲، اور اگر ہم م کو اس سے نہیں تو غ = ۰، جبکہ ف = ۰، اور اس لئے لازماً

فہمہ = ع = فہمہ سم ، اور اس لئے

$$\text{سم} = \text{سم} = \text{سم} + \text{سم} [\text{سم} = \text{سم}]$$

اور  $و = \text{فہمہ} (\text{سم} + \text{سم})$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جمہ} = و + \frac{1}{4} \text{ع}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرء}} = \text{فہمہ} (\text{سم} + \text{سم}) + \frac{1}{4} \text{ع}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{لا/ک}} = \text{مستقل} = \text{طا} (\text{سم} + \text{سم}) + \frac{1}{4} \text{ع}$$

اور لا = جبکہ ع = پس

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا/ک}} = \text{ع} - \text{طا} (\text{سم} + \text{سم}) + \text{طا سم} \dots (1)$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{لا/ک}} = \text{ع} - \text{ی} = و$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{لا/ک}} = \text{ع} - \text{فہمہ} (\text{سم} + \text{سم}) \dots (2)$$

حل کو مکمل کرنے کے لئے اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ۲ لا ہو تو لا = و کے جواب میں ع کی قیمت اس مساوات سے حاصل ہوگی

$$\text{جب ع} = \text{ی} = \text{فہمہ} (\text{سم} + \text{سم}) + \frac{3}{4} \text{ع}$$

اور چونکہ

$$\text{فہمہ} (\text{سم} + \text{سم}) + \frac{3}{4} \text{ع} = \frac{(\text{ع} - \text{ع})(\text{ع} - \text{ع})}{\text{فہمہ} - \text{ع}}$$

$$\therefore \text{جب ع} = 1 + \frac{2(1 - \text{ع})}{\text{فہمہ} - 1 + \frac{3}{4} \text{ع}}$$

لے طا = ع (Weierstrass' Zetafunction)

$$\text{یعنی فہرہ ۶} = \frac{\text{ہر (۵ + جب عد) ۳ - (۱ + جب عد) ۳}}{\text{۳ (۱ - جب عد)}}$$

مزید برآں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ربط (۳) کی مدد سے ربط (۲) اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{۲}{۱} \text{ ما/ک} = \frac{\text{فہرہ ۶ - ع}}{\text{فہرہ ۶ - ع}}$$

نیز یہ کہ نقاط (۱) اور (ب) کے ارتفاع علی المرتبہ ۲/ک = ہر - ۱

اور ہر - جب عد سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۷۱۔ دائری ٹی۔ انصہابی دائری ٹی کے اندرونی مانع کی سطح کی

شکل کے لئے تقریبی مساوات حاصل کرنا جبکہ ٹی مانع میں جزء غرق ہو۔

دفعہ (۱۷۰) کی شکل کو سطح کی نصف النہاری تراش قرار دینے سے دفعہ ۱۶ (۱۷۰) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۳}{ک} = \frac{ج ثا}{ت} = \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر}$$

جہاں کہ ہوائی کا دباؤ مانع کی سطح کے عین نیچے مانع کے دباؤ سے بعد ج ثا کے بڑا ہے۔

اب چونکہ ر = لاقم فہرہ ، یہیں مساوات

$$\frac{۳}{ک} = \frac{\frac{\text{فہرہ}}{\text{فہرہ}}}{\frac{۱}{۲} \left\{ \left( \frac{\text{فہرہ}}{\text{فہرہ}} \right) + ۱ \right\}} + \frac{\frac{\text{فہرہ}}{\text{فہرہ}}}{\frac{۱}{۲} \left\{ \left( \frac{\text{فہرہ}}{\text{فہرہ}} \right) + ۱ \right\}}$$

حاصل ہوتی ہے جو شکل

$$\frac{۳}{ک} = \frac{\frac{\text{فہرہ}}{\text{فہرہ}}}{\frac{۱}{۲} \left\{ \left( \frac{\text{فہرہ}}{\text{فہرہ}} \right) + ۱ \right\}}$$

میں لکھی جاسکتی ہے۔

نیز اگر مٹی کا اندرونی نصف قطر  $\rho$  ہو اور مائع مٹی کی سطح کو جس حادہ زاویہ پر ملتا ہے وہ عم ہو تو

$$\frac{r}{\rho} = \frac{m}{m'} \text{ جبکہ } \rho = r$$

اگر زاویہ تماس منفرد ہو تو مائع مٹی میں نیچے دبا ہوا ہوگا اور اگر ہم ماکو نیچے وارنا ہیں تو مائع کی سطح کے عین نیچے اس کا دباؤ گرہ ہوائی کے دباؤ سے بقدر ج ث ماکے بڑا ہوگا۔

زیر بحث صورت چونکہ بارہما کے اندرونی پارہ کی آزاد سطح پر بھی مشتمل ہے اس لئے اس مضمون پر کافی بحث و تحقیق ہوتی رہی ہے چنانچہ نصف النہاری منحنی کی تفرقی مساوات کا حل Lohnstein نے ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل کیا جو مستحق رہتا ہے جب تک کہ منحنی کا تماس انتظامی نہیں ہو جاتا۔ (C. Runge) نے تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عددی طریقہ کے ضمن میں مثال کے طور پر اس مساوات پر غور کیا۔ لارڈ کیلوں نے رسالہ (Nature) میں شماری منحنیوں کی تقریبی شکل دریافت کرنے کے ایک ہندسی طریقہ کی نشان دہی کی جس پر بالتفصیل (C. V. Boys) نے بحث کی۔ تقریب کا ایک اور طریقہ (F. Neumann) نے بھی معلوم کیا ہے۔ (۱۷۷)

۱۷۲۔ مائع کا قطرہ۔ اگر مائع کا ایک قطرہ ایک افقی میز پر رکھ دیا جائے تو

Dissert. Berlin, 1891

Math. Annalen. 46 (1895), p. 167.

Nature, July and August, 1886.

Phil. Mag. Series 5, Vol. 36, p. 75, 1893.

Vorlesungen über die Theorie der Capillarität. Leipzig. 1894.

۱۷

۱۸

۱۹

۲۰

۲۱

توازن کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{ضدہ}}{\text{ت}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

جہاں سطحی تناؤ ہے اور اندرونی دباؤ اور کرہ ہوائی کے دباؤ کے درمیان فرق ضدہ ہے۔

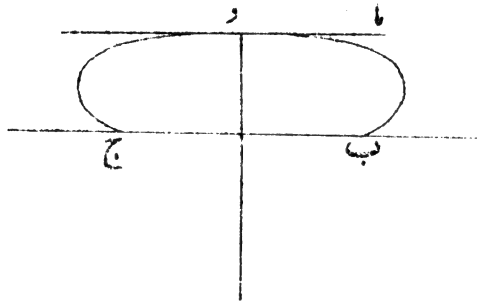
عام طور پر قطرہ ایک گردشی سطح کی شکل اختیار کرے گا۔

اس صورت کو بیکر فرض کرو کہ مائع کے اندر بلند ترین نقطہ پر دباؤ  $\pi$  ہے

اور کرہ ہوائی کا دباؤ  $\pi$  ہے۔ تب لا کو بلند ترین نقطہ سے نیچے وارنا پئے سے

$$\text{ضدہ} = \pi + \text{ج ڈٹ لا} - \pi$$

$$\frac{\pi - \pi + \text{ج ڈٹ لا}}{\text{رت}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$



پس اگر بلند ترین نقطہ پر نصف قطر اخنما ہو تو

$$\frac{\pi - \pi}{\text{ت}} = \frac{2}{r}$$

$$\therefore \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{\text{ج ڈٹ لا}}{\text{ت}} + \frac{2}{r} = \frac{2}{r} \quad (1)$$

اگر ہم شیخے پر پارہ کے قطرہ کی یا فولاد پر پانی کے قطرہ کی صورت میں  
تو مشاہدہ سے معلوم ہو گا کہ فرما فرما اس سے نیچے دار گھٹتا جاتا ہے

(۱۷۸)

اور نصف النہار می منحنی کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\frac{2}{r}}{\frac{1}{k}} + \frac{2}{r} = \frac{1}{\frac{1}{k} \left\{ \frac{2}{r} \left( \frac{r}{k} \right) + 1 \right\}} + \frac{\frac{2}{r}}{\frac{1}{k} \left\{ \frac{2}{r} \left( \frac{r}{k} \right) + 1 \right\}}$$

$$\frac{\frac{2}{r}}{\frac{1}{k}} + \frac{2}{r} = \frac{1}{\frac{1}{k} (2E + 1)} + \frac{E}{\frac{1}{k} (2E + 1)} \frac{r}{r}$$

$$\frac{2}{r} = E$$

پس اگر نصف النہار می منحنی کے کسی نقطہ پر ماس کا میلان محور لا کے  
ساتھ ہو تو  $E = \text{مس فہ}$  اور

$$\therefore \text{جم فہ} \left( \frac{1}{k} - \frac{r}{k} \right) = \frac{2}{r} + \frac{1}{k}$$

اگر قطرہ اتنا بڑا ہو کہ ہم اس کی چوٹی کو چپٹا تصور کر سکیں اور اگر افقی  
تراشوں کے انحناء کو نظر انداز کیا جائے تو مساوات (۱) ہو جائے گی

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{E}{\frac{1}{k} (2E + 1)} \frac{r}{r}$$

$$\text{اس طرح } \frac{1}{k} = \frac{E}{\frac{1}{k} (2E + 1)} \text{ کیونکہ } E = \infty \text{ جبکہ } \frac{1}{k} = \infty$$

$$\frac{2 - k}{k} = \frac{r}{r}$$

اس مساوات کا مکمل کرنے کے لئے رکھو لا = ۲ ک جبکہ

$$\begin{aligned} \text{اس طرح} \quad \text{فرما} &= \text{ک (قم طہ - ۲ جب ط) فرط} \\ \therefore \quad \text{ا} + \text{ب} &= \text{ک کوک مس} \frac{\text{ط}}{۲} + \text{ک جم ط} \\ \text{یا} \quad \text{ا} + \text{ب} &= \text{ک کوک} \frac{\text{ک} - \text{ماہ ک} - ۲}{۲} + \frac{\text{ماہ ک} - ۲}{۲} \end{aligned}$$

جہاں بباستقل ہے -  
اُس نقطہ پر جہاں ماس انتصابی ہے ع = ۰ اور

$$\therefore \quad \text{لا} = \text{ک} ۲۷$$

اگر نصف النهار سی مغبی اور افقی مستوی کے درمیان حادہ زاویہ ع ہو  
یعنی پارہ مستوی کو جس زاویہ پر ملتا ہے وہ ۲۷ - ع ہو اور اگر قطرہ کا ارتفاع  
ف ہو تو

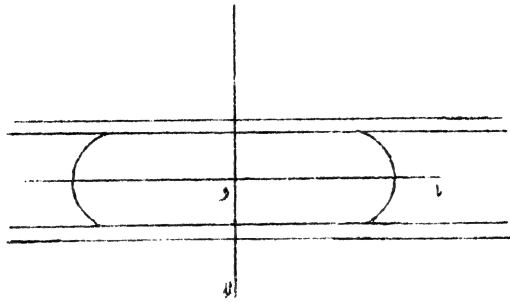
$$\text{ف} = - \left( \frac{۲۷}{۲} - ع \right) \text{ جبکہ لا} = \text{ف}$$

$$\therefore \quad \text{ف} = \text{ک جم} \frac{\text{ع}}{۲}$$

۱۷۳ — متوازی تختیوں کے درمیان قطرہ - اگر پارہ کا ایک قطرہ  
شیشے کی دو متوازی افقی تختیوں کے درمیان رکھ دیا جائے جو ایک  
دوسرے سے اس قدر نزدیک ہیں کہ جاذب الارض کا عمل نظر انداز  
کیا جاسکتا ہے تو قطرہ کے اندر دباؤ مستقل ہوگا اور اگر سطح گردشی سطح  
ہو تو ہمیں مساوات

$$\frac{\text{صنہ}}{\text{ت}} = \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر}$$

حاصل ہوگی جہاں اندرونی دباؤ کا اضافہ کرہ ہوائی کے دباؤ پر صنہ ہے۔



اس صورت میں لا کو اُس مستوی سے نیچے دارنا پنا مناسب ہوگا جو تختیوں کی دونوں سطحوں کے وسط میں واقع ہے اور تب ہمیں مساوات

$$- \frac{ع}{\frac{ع}{2} + 1} = \frac{ا}{\frac{ا}{2} + 1} = \frac{ص}{ب} = \frac{۲}{ب} \quad (فرض کرو)$$

حاصل ہوگی۔

تکمل کرنے سے اور ما = ل، جبکہ لا =۔ یعنی سے

$$\frac{ب}{\frac{ب}{2} + 1} = \frac{ا + ل}{\frac{ا + ل}{2} + 1} = ل - ب - ل$$

$$\frac{ا + ل - ب - ل}{\frac{ا + ل - ب - ل}{2} + 1} = \frac{فرا}{فرا} \quad \text{اس طرح}$$

۱۸۰ رکھو ما = ی تو

$$\frac{ا + ل - ب - ل}{\frac{ا + ل - ب - ل}{2} + 1} = \frac{فرا}{فرا} \quad \text{فرا} = \frac{ا + ل - ب - ل}{\frac{ا + ل - ب - ل}{2} + 1}$$

اگر ہم لکھیں ی =۔ و + ل + ل + ل (ب - ل) تو حاصل ہوگا





پس فرلا = {فہ (۶ + سم) +  $\frac{1}{2}$  (ب + ل ب - ل)} فرء

اور تکمل سے

لا + مستقل = طا (۶ + سم) +  $\frac{1}{2}$  (ب + ل ب - ل)

لیکن لا = ۰ جبکہ ی = ل

یا جبکہ و = -  $\frac{1}{2}$  ل +  $\frac{1}{2}$  (ل - ب) = ع = ۳ = فہ (سم)

اس طرح لا کی اس قیمت کے لئے ۶ کو صفر ہونا چاہیئے۔

∴ لا = طا (۶ + سم) - طا (سم) +  $\frac{1}{2}$  (ب + ل ب - ل)

اور ما = - فہ (۶ + سم) +  $\frac{1}{2}$  (ل - ل - ل ب + ب)

سے کارٹیزی محدود کی قیمتیں مبدل ۶ کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر قطرہ اس قدر بڑا ہو کہ ہم  $\frac{1}{2}$  کو نظر انداز کر سکیں تو  $r = \frac{2}{3}$  اور

اس طرح نصف انہاری مخنی دائرہ ہوگا۔

اس صورت میں اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ۲ ف ہو تو شکل سے ظاہر ہے کہ

$r = \frac{2}{3}$  ف قطع

جہاں عمودہ حادثہ زادیہ ہے جو پارہ اور ہر تختی کی سطح کے درمیان باہر کی طرف بٹتا ہے۔

۴۔ اگر تختیہ کی دو متوازی افقی تختیوں کے درمیان پانی کا ایک

(Anticlastic)

قطرہ گردشی سطح کی شکل اختیار کرے تو سطح ضد انحنائی

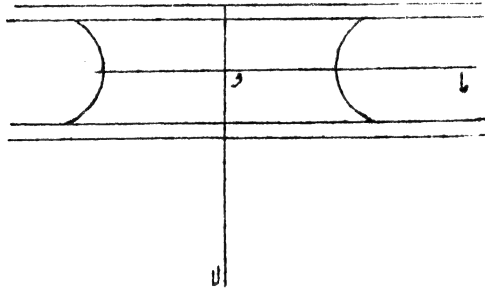
ہوگی کیونکہ پانی اور تختیہ کا زادیہ تماس حادثہ ہے۔

اس صورت میں اگر کہ ہوائی کا دباؤ  $\pi$  اور قطرہ کے اندر پانی کا دباؤ

۳۳ ہو اور اگر نصف النہاری منحنی کا نصف قطر انخار ہو، اور علی القوائم عمادی تراش کا نصف قطر انخار یعنی عماد کا وہ طول جو سطح کے محور سے قطع ہوتا ہے تو توازن کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{صنہ}}{\text{ت}} = \frac{\pi - \pi}{\text{ت}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

کیونکہ اگر ہم عماد کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کریں تو تناؤں کا حاصل سمتیں باہر کی طرف ہوگا اور دوسرے دو تناؤں کا حاصل اندر کی طرف -



حسب سابق لاکو تختیوں کے درمیان وسطی سطح سے نیچے دارنا پننے سے مساوات بالا ہو جائے گی

$$\frac{\text{ع فرخ}}{\text{فرنا}} = \frac{1}{\frac{1}{r}(2e+1)} - \frac{1}{\frac{1}{r}(2e+1)} = \frac{\text{صنہ}}{\text{ت}} = \frac{2}{b} \quad \text{فرض کرد}$$

جس سے مساوات

$$b + l - a = \frac{b}{\frac{1}{r}(2e+1)}$$

حاصل ہوگی اور اس سے گذشتہ دفعہ کی طرح ہم اخذ کر سکتے ہیں



۴ ت جب ۲ (ط - ع) = ج ث (ک جم ط - ف) ۲

جہاں وقت شعری کا زاویہ عم، سوئی کے اکائی طول کا وزن و، پانی کی ترقی سطح کے اوپر سوئی کے محور کا ارتفاع ف اور زاویہ ن وق، ۲ ط ہے۔

۷۹۔ مانع کی جہلیاں۔ مانع کی جہلیاں مختلف طریقوں سے پیدا کی جاتی ہیں۔ صابونی بلبلہ ایک عام مثال ہے۔ صاف شیشے کی بوتل کو جس میں کچھ لزج مانع ہونا سے یا صابون اور پانی یا صابون اور گلیسرین کے محلول میں تار کا ایک فریم ڈبو کر اس کو بتدریج باہر نکال لینے سے مانع کی جہلیاں پیدا کی جاسکتی ہیں اور ان کی خصوصیات کا مشاہدہ کیا جاسکتا ہے۔

جھیلوں کا ظاہر استوی کی شکل میں حاصل ہونا اس بات کی دلیل ہے کہ جاذبہ ارض کا عمل بمقابلہ جہلی کے تناؤ کے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

یہ دیکھنے میں آتا ہے کہ بہت چھوٹے ماسی عمل سے بھی جھلی بھٹ جاتی ہے جس سے یہ متنبط ہوتا ہے کہ اس کے کسی خط پر کا زور کلا اس خط کے عمودی سمت میں ہوتا ہے اس سے دفعہ (۱۴۹) کی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تناؤ ہر سمت میں وہی ہے۔

۱۷۷۔ مستوی جہلی کی توانائی۔ لزج مانع کے اندر سے اگر ایک مستوی جہلی

نکال لی جائے تو کچھ کام کیا جاتا ہے۔ یہ کام جہلی کی توانائی با نقود کو تعبیر کرتا ہے۔

ایک مستطیل جہلی (ب ج د کا تصور کرو جو سیدھے تاروں (ا د ب ج

سے محدود ہے۔ (ب مانع کی سطح میں ہے اور ج د حرکت پذیر ہے۔

جہلی کو باہر نکال لینے میں جو کام ہوگا وہ  $\tau \times (ب \times ا د)$  کے مساوی ہوگا اور اس لئے اگر سطحی توانائی فی ایکائی رقبہ  $s$  ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

یہ یاد رہے کہ جس چیز کو ہم نے  $s$  سے  $s$  یہاں جہلی کا تناؤ کہا ہے وہ جہلی کے

کسی رخ کے سطحی تناؤ کا دو چند ہے۔

۱۷۸۔ انتصابی مستوی میں کسی شکل کا ایک تار ہے جس کے دو نقطوں پر دئے ہوئے وزن اور طول کا تار کا باندھ دیا گیا ہے۔ مانع کی ایک مستوی جہلی کے حدود تار اور تار کا ہیں۔

تار کے کی اختیار کردہ شکل کو معلوم کرنے کے لئے ہم یہ شرط بیان کریں گے کہ اس نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہے۔

اگر رقبہ و ا ب ج ' ا ہو تو جہلی کی توانائی

$$= \text{س} \cdot \text{ا} - \text{کس} \cdot \text{ما فرلا}$$

اور اگر تار کے کے اکائی طول کا وزن و ہو تو نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہوگی جبکہ

$$\text{کس} \cdot \text{ما فرلا} + \text{د} \cdot \text{ک} \cdot \text{ما فرس}$$

اعظم ہو بشرطیکہ

$$\text{ک} \cdot \text{فرس} = \text{ل}$$

پس ہمیں یہ معلوم کرنا ہوگا کہ کس شرط کے تحت جملہ

(۱۸۳)

$$\text{ک} \cdot \text{ا} \cdot \text{س} + \text{ما} + (\text{د} + \text{ا} \cdot \text{ل}) \cdot \text{ا} + \text{ا} \cdot \text{ع} + \text{ا} \cdot \text{ع} \cdot \text{ا} \cdot \text{فرلا}$$

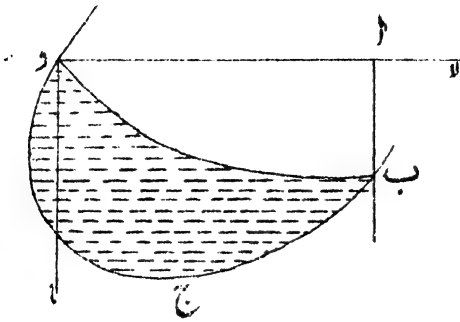
کا تغیر صفر ہو جاتا ہے۔

احصاء تغیرات کی مدد سے اس شرط سے مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{د} + \text{ا} \cdot \text{ل}}{\text{س} - \text{ا}} = \frac{\text{ا} + \text{ا} \cdot \text{ع} + \text{ا} \cdot \text{ع} \cdot \text{ا} \cdot \text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ا} \cdot \text{ع} + \text{ا} \cdot \text{ع} \cdot \text{ا} \cdot \text{فرلا}}$$

فرلا کی شکل ہوگی

اس کو بہ آسانی شکل کر سکتے ہیں۔



یہ مساوات مستقلوں کی خاص قیمتوں کے لئے دائرہ یا زنجیرہ کو تبخیر کر سکتی ہے۔  
۱۷۹۔ تاکہ گے ایک عنصر کے توازن پر غور کرنے سے بھی اس سوال کو حل کیا جاسکتا ہے۔  
وہے قوس کو ناپ کر فرض کرو کہ ن پر کے ماس کا میلان د کے ساتھ ہے۔

تب اگر ن پرتا گے کا تناؤ ت اور جیلی کا تناؤ ت ہو تو مساواتیں  
مفت ت + ومفت س × جب ف = ۰

$$\frac{\text{ت مفت}}{\text{مفت س}} = \frac{\text{ت مفت س} + \text{ومفت س} \times \text{جم ف}}{\text{مفت س}}$$

حاصل ہوتی ہیں جہاں نقطہ ن پرتا گے کا نصف قطر انحناء ہے۔

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فرت}}{\text{فرما}} = - \text{و} \quad \text{ت} = \text{و} (۱ - ۱)$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{ع} - \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}}{\frac{۱}{۲} (۲۶ + ۱)} = \frac{۱}{(۱ - ۱) \text{و}} \left( \frac{۲}{\frac{۱}{۲} (۲۶ + ۱)} + ۲ \right)$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{۲}{\text{و}} = \frac{۱}{۲} (۱ - ۱) \frac{\text{فرما}}{\text{فرع}} - \frac{۱}{۲} (۲۶ + ۱) - \frac{۱}{۲} (۲۶ + ۱)$$

$$\text{پس } \frac{1-a}{1+a} = \frac{1-a}{1+a} + m$$

یہی شکل دفعہ اسبق میں حاصل کی گئی ہے۔

اگر ہم یہ مان لیں کہ  $d = e$  جبکہ  $a = b$  اور  $f = g$  جبکہ  $m = n$  تو ہر مساوات کے دونوں معلوم مستقلوں کی قیمتیں ہو جاتی ہیں اور چونکہ  $m = n$  اس لئے ہر مساوات سے  $e$  کی قیمت  $a$  کی رقوم میں وہی حاصل ہوتی ہے۔

۱۸۰۔ صابون کے کردی بلبلے کی توانائی۔ صابون کے بلبلے کی

توانائی وہ کام ہے جو اس کو پیدا کرنے میں ہوا۔ یہ کام دو حصوں پر مشتمل ہوگا ایک تو وہ کام جو جلی کو ملنے سے بچھینچ لینے میں ہوا اور دوسرے وہ کام جو بلبلے کے اندر کی ہوا کو بچکانے میں ہوا۔

اگر سطحی تناؤ  $T$  ہو تو اول الذکر حصہ  $T$  سے ہوگا (جہاں سطح کو  $S$  تعبیر کرتا ہے) کیونکہ ایک چھوٹے مستوی عنصر کی توانائی  $T$  سے ہے۔ دوسرے حصے کے لئے فرض کر دو کہ اندرونی ہوا کا دباؤ  $p$  ہے جب

نصف قطر  $r$  ہو کر ہوائی کا دباؤ  $p$  ہے تو  $d = p - \frac{2T}{r}$  اور اگر ہوا کی

کیست اتنی ہو کہ اس کا حجم دباؤ  $p$  پر  $V$  ہوتا ہے تو

$$pV = \frac{p}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + d = \frac{p}{\gamma} + \frac{2T}{r} \quad (\text{فرض کرو})$$

اور دفعہ (۱۴) سے، ہوا کو حجم  $V$  سے حجم  $V'$  میں بچکانے میں جو کام ہوتا ہے

$$W = p(V' - V) = \frac{p}{\gamma} (V' - V) = \frac{p}{\gamma} (V' - V) + \frac{2T}{r} (V' - V)$$

$$= \frac{p}{\gamma} (V' - V) + \frac{2T}{r} (V' - V) = \frac{p}{\gamma} (V' - V) + \frac{2T}{r} (V' - V)$$



اگر ہم یہ مان لیں کہ بیلے کے اندرونی دبیرونی دباؤں کا فرق بمقابلہ کرہ ہوائی کے دباؤ کے چھوٹا ہے تو  $\frac{2}{3} \frac{t}{r}$  کو ہم چھوٹا فرض کر سکتے ہیں اور اسلئے آخری جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{2}{3} \frac{t}{r} \left\{ \frac{2}{r} + \pi \right\} \left( \frac{2}{r} - \frac{2}{3} \frac{t}{r} \right) - \frac{2}{r} \frac{t}{r}$$

$$\frac{2}{3} \frac{t}{r} \times \frac{2}{r} = \frac{2}{3} \frac{t}{r} \times \frac{2}{r} = \frac{2}{3} \frac{t}{r}$$

پس ہوا کو پھکانے میں جو کام ہوا وہ اس کام کے ساتھ  $2 : 3$  کی نسبت رکھینگا جو جہلی کو باہر کھینچ لینے میں ہوا۔

۱۸۱۔ مانع کی جلیوں کی شکلیں۔ اگر جہلی کے دونوں رخوں پر ہوا کا دباؤ وہی ہو تو توازن کی شرط یہ ہوگی کہ

$$0 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

یاد رہے کہ اوسط انحناء صفر ہے۔

یہ شرط زنجیرہ نما (Catenoid) اور مرغول نما (Helitoid)

کی صورتوں میں پوری ہوتی ہے جو اس لئے مانع کی جلیوں کی ممکنہ اشکال ہیں۔ کارٹیزنی متحدہ دوں میں یہ مساوات دفعہ (۱۴۵) کے بموجب ہو جائیگی

$$\left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{2}{r} - \frac{2}{3} \frac{t}{r} \right) - \frac{2}{r} \frac{t}{r} = \frac{2}{r} \frac{t}{r} \left( \frac{2}{r} + \pi \right) \left( \frac{2}{r} - \frac{2}{3} \frac{t}{r} \right) - \frac{2}{r} \frac{t}{r}$$

بڑے بڑے علما و ریاضی نے متعدد مقالوں میں اس مساوات پر بحث کی ہے چنانچہ اس مساوات کے چند مشہور خاص حل حاصل ہو چکے ہیں۔ مثلاً

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{ اور } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{ جب } r = \text{جب } r = \text{جب } r =$$

جن میں سے ہر ایک ایسی سطح ہے جس کا اوسط انحناء صفر ہے۔  
پلاٹو (plateau) کی تصنیف

Sur les liquides Soumis aux seules forces moléculaires, 1873

میں علماء اور یاقینی نے اس مضمون پر جو محنتیں کی ہیں ان کا شاندار تذکرہ کیا گیا ہے اور اس نے خود اپنے تجربات بھی اس کتاب میں درج کئے ہیں۔ ڈاربو

Theorie Generale des surfaces کی کتاب Darbou

minima Surfaces کے حصہ اول باب سوم میں قائل سطحوں

کی پوری تفصیل موجود ہے یعنی ایسے سطحوں کی جو مندرکہ بالا شرط کو پوری کرتی ہیں۔

۱۸۲۔ اگر چلی کی شکل گردشی سطح کی ہو تو سطح کے محور کو محوری قرار دینے سے

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = f(y)$$

اس صورت میں اوسط انحناء کے صفر ہونے کی شرط سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = 0$$

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} = \frac{r_1 r_2}{f(y)}$$

یا مکمل سے

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_2^2} = \frac{f(y)}{r_1^2 r_2^2}$$

یا

$$r_1^2 = r_2^2 = \frac{f(y)}{r^2}$$

یا

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{f(y)}{r^2}$$

فرض کرو کہ  $\frac{y}{x} = 1$  وہ  $\frac{y}{x}$  تو

$2 = 1$  (ف)  $\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$  (ی)  $\frac{y}{x}$  جس سے ظاہر ہے کہ گردشی سطح کی شکل کی جہلی کی ممکنہ شکل صرف زنجیرہ بنا ہے جبکہ دونوں رخوں پر دباؤ وہی ہو۔

۱۸۳۲ — اصول توانائی کی مدد سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے کیونکہ سطح

ک ۲۲ مافرس

اس صورت میں اعظم یا اقل ہوگی اور احصائے تغیرات کی مدد سے اس سے جو تکوینی معنی حاصل ہوگا وہ ایک زنجیرہ ہوگا جس کا مرتب گردش کا محور ہوگا۔  
(Researches in the Calculus of Variations)

میں یہ بتایا گیا ہے کہ جب ایک خط مستقیم اور دو نقطے ایک ہی مستوی میں دئے جائیں تو ہمیشہ ایسے زنجیرہ کا کھینچنا ممکن نہیں جو ان نقاط میں سے گزرے اور جس کا مرتب یہ خط مستقیم ہو۔

یہ بھی دکھایا گیا ہے کہ چند شرائط کے تحت ایسے دو زنجیرے کھینچے جاسکتے ہیں اور یہ کہ ایک خاص صورت میں صرف ایک زنجیرہ ایسا کھینچنا جاسکتا ہے۔ یہ دونوں زنجیرے جب موجود ہوں تو ایسی شکل کا جواب ہوتے ہیں جو ایک بند (بے سرا) ڈوری کو دو چکنی کھونٹیوں پر لٹکانے سے پیدا ہوتی ہے۔

جب اس قسم کے دو زنجیرے ہوں تو اوپر کے زنجیرہ کو مرتب کے گرد گھمانے سے جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ اقل ہوتی ہے لیکن نچلے زنجیرے کو گھمانے سے جس سطح کی تکوین ہوتی ہے وہ اقل نہیں ہوتی۔ جب صرف ایک زنجیرہ ہو تو سطح اقل نہیں ہوتی۔

پس اگر دو دائری تاروں سے ایک ایسا فریم بنایا جائے کہ ان تاروں کے مستوی ایک دوسرے کے متوازی اور ان کے مرکزوں کو ملانے والے

خط پر عمود وار ہوں تو تاروں کو مانع کی جہلی سے ملانا ہمیشہ ممکن نہیں۔ بعض صورتوں میں دو میں سے ایک زنجیرہ نما سے تاروں کو ملانا ممکن ہے لیکن اوپر کے زنجیرہ کو گھمانے سے جو زنجیرہ نما پیدا ہوتا ہے اُس کی صورت میں توازن قائم ہوگا اور دوسرے زنجیرہ نما کی صورت میں غیر قائم ہوگا۔ (۱۸۸)

جب صرف ایک زنجیرہ نما ہو تو توازن غیر قائم ہوگا۔ اس مسئلہ کا ایک غیر مسلسل حل بھی ہے جس میں دو دائروں کو ان نقطوں کے معینوں کو گھمانے سے حاصل کیا جاتا ہے اور ان کے مرکز ایک لا انتہا سبک اسطوانے سے ملائے جاتے ہیں۔

Encyclopaedia Britannica

انسائیکلو پیڈیا بریٹانیکا

میں کلرک میکسویل Clerk Maxwell نے قوت شعری پر

ایک مضمون میں اس مسئلہ پر اس طرح روشنی ڈالی ہے۔ جب دو زنجیرے جن کا مرتب وہی ہو دو دئے ہوئے نقطوں میں سے کھینچے جاسکیں اور مرتب کے گرد ان کو گھمانے سے دو زنجیرہ نما حاصل کئے جائیں تو ہر زنجیرہ نما کا اوسط انحناء صفر ہوتا ہے۔

اگر ان دو زنجیروں کے درمیان ایک دوسرا زنجیرہ انہی نقطوں میں سے گزرتا ہوا کھینچا جائے تو اس کا مرتب اُن دونوں کے مرتب کے اوپر ہوگا اور اسلئے کسی نقطہ پر اس کا نصف قطر انحناء اُس فاصلے سے کم ہوگا جو عماد کی سمت میں اس نقطہ اور پہلے مرتب کے درمیان ہے۔

اس لئے گردشیں سطح کا اوسط انحناء محور کی طرف محذب ہوگا اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان میں سے کسی زنجیرہ نما کو دونوں زنجیرہ نماؤں کے درمیان کے کسی زنجیرہ نما پر ہٹا دیا جائے تو چلی محور سے ہٹ جائیگی۔

پھر اگر ایک زنجیرہ نما دونوں زنجیرہ نماؤں کے باہر لیا جائے تو اس کا اوسط انحناء محور کی طرف متعرج ہوگا اور اس لئے اگر اوپر کا زنجیرہ نما اوپر ہٹایا

۱۹ انسائیکلو پیڈیا بریٹانیکا میں اشاعت میں لارڈ ریالے نے اس مضمون کی نظر ثانی کی ہے۔



بوجب اس کے کہ منحنی محور لاکر طرف محذب یا مقعر ہے، یعنی اوسط انحناء مستقل ہے۔ عام صورت میں ہمیں یہ شرط بیان کرنی پڑیگی کہ دئے ہوئے حجم کے لئے سطح اعظم ہے یا اقل؟ اس سے وہی عام نتیجہ مستنبط ہوگا۔

۱۸۵۔ اگر چلی گردش سطح کی شکل کی ہو تو ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ نصف النہاری منحنی ایک ایسی مخروطی کے ماسکہ کا طریق ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم پر لڑک رہی ہو۔ اگر مخروطی کا نصف قطر انحناء اور اس کے طرہ کا نصف قطر انحناء ہو تو

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s \cdot n} - \frac{1}{s \cdot n^2} \quad (\text{شکل دیکھو اگلے صفحہ پر})$$

$$\frac{1}{s \cdot n} - \frac{1}{n \cdot l \cdot s \cdot n} = \frac{n \cdot g}{n \cdot l \cdot s \cdot n}$$

$$\frac{1}{s \cdot n} - \frac{1}{s \cdot m \cdot a} = \frac{n \cdot l}{s \cdot m \cdot a}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{s \cdot n^2} - \frac{1}{s \cdot m \cdot a}$$

مکانی کی صورت میں یہ صفر ہو جاتا ہے اور اسلئے  $r = -s \cdot n$ ۔

$$\frac{1}{s \cdot n} - \frac{1}{s \cdot m \cdot a} = \frac{b \cdot j}{s \cdot n \cdot h \cdot n} \quad (190)$$

جہاں  $h$  دوسرا ماسکہ ہے اور اس لئے  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{a \cdot j}$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{a \cdot j}$$

(یا ماڈیٹر کا تکمیل احصا۔)

لے دیکھو جدید کا (Calculus of Variations)

Roulettes and Glissettes

لے دیکھو



ماہنامہ کی چھاپوں کے مضمون پر مختلف تصانیف و مقالوں کا مکمل تذکرہ  
 Encyclopaedia (Plateau) کی تصنیف اور (Britishica) میں پروفیسر کلرک میکویل کے مضمون میں ملے گا۔ اور قوت  
 شعری کے مضمون پر عموماً حسب ذیل کتابیں مفید ثابت ہونگی (۱۹۱)

Mathieu, *Theorie de la Capillarite*, 1883.

F. Neumann, *Vorlesungen uber der Theorie der Capillaritat*, 1894.

Poincaré, *Capillarite*, 1895.

The articles *Kapillaritat* by H. Minkowski in *Encyklop der Math. Wissensch.* Bd. v. 1907, and by F. Peckels in *Winkelman's Handbuch der Physik*, Bd. I. 1908, both of which contain a full bibliography of the subject.

مثال۔ ایک صابونی بلبہ اپنے ثابت حدود سے بڑھتا ہے اس طرح  
 کہ ان حدود کے ساتھ اس سے ایک بند فضا پیدا ہوتی ہے جس کا  
 حجم ج ہے اس میں گیس دباؤ د پر ہے جس کی پیش مطلق ط ہے۔ گیس کی پیش میں  
 میں تبدیلی اضافہ کیا گیا ہے۔ اگر چلی کا رقبہ ل ہو جبکہ پیش ط اور دباؤ د ہے تو ثابت  
 کردہ کہ

$$ت ط = \frac{فرا}{فرط} = ج (1 - \frac{ط}{د} \frac{فرا}{فرط})$$

جہاں سطحی تناؤ ت کو مستقل فرض کر لیا گیا ہے اور بیرونی دباؤ نظر انداز کر دیا گیا ہے۔  
 د اور ط میں ربط حاصل کرو جبکہ میلہ کردی شکل کا ہو۔

توانائی کا تغیر = ت مع ل

= د مع ج



لیکن  $د ح = ک ط$  ، جہاں کہ مستقل ہے  
 $\therefore د م ف ح = ک م ف ط - ح م ف د$

$$\therefore ت ف ر ا = ک - ح \frac{ف د}{ف ر ط}$$

$$= ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط})$$

$$= \frac{د ح}{ط} (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط})$$

کر کے لئے  $۱ = ۳۴۲$  اور  $د = ۲$   $\frac{ت}{د}$   
 $\therefore ۱ = ۱۶ ت / د$

پس مساوات بالاسے

$$- ۳۴۲ \frac{ت}{د} \frac{ف د}{ف ر ط} = ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط})$$

$$\therefore - ۲ \frac{ا ت}{د} \frac{ف د}{ف ر ط} = ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط})$$

لیکن  $د ح = ک ط$

$$\therefore \frac{۱}{۳} در ا = ک ط یا \frac{۲}{۳} ت ا = ک ط$$

$$\therefore - \frac{۲ ک ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط} = ک - ک ط \frac{ف د}{د} \frac{ف ر ط}$$

$$\therefore = ۱ + \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ر ط}$$

$$\therefore د ا ط = مستقل$$

امثلہ

(۱۹۱)

۱۔ دو کردی صابونی بیلے ایک پانی ہے اور دوسرا پانی اور الکحل کے آمیزے سے

اُٹھائے گئے ہیں۔ اگر تناؤ فی خطی اینچ علی الترتیب ایک گرین اور  $\frac{1}{4}$  گرین کے اوزان کے مساوی ہوں اور نصف قطر  $\frac{1}{4}$  اینچ اور  $\frac{1}{4}$  اینچ ہوں تو دونوں صورتوں میں کل اندرونی دباؤ کا کل بیرونی دباؤ پر جو اضافہ ہوا ان کا مقابلہ کرو۔

۲۔ اگر راور نصف قطر کے دو صابونی بلبے ایک ہی مائع سے اُٹھائے جائیں اور دونوں مکرر نصف قطر کا ایک بلبہ بن جائیں تو ثابت کرو کہ تناؤ

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{r_1 - r_2 - r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$$

کے مساوی ہے جہاں  $\pi$  کرہ ہوائی کا دباؤ ہے۔

۳۔ پانی اور ہوا کی سطح فاصل کا سطحی تناؤ ۲۵ دس، پانی اور پارہ کی سطح فاصل کا ۶ و ۴، اور پارہ اور ہوا کی سطح فاصل کا ۵۵ ہے۔ پارہ کی سطح پر پانی کا قطرہ رکھنے سے کیا اثر ظہور پذیر ہوگا۔

۴۔ تیل کے ایک قطرہ کو پانی کی سطح پر رکھتے ہی وہ فوراً انتہائی ریت پرست میں پھیل جاتا ہے تیل کے اس پھیلاؤ کے سبب کی تشریح کرو۔ اور مظہر کے مشاہدے سے ثابت کرو کہ پرت کی موٹائی ۱۰۰۰۰ اینچ سے کم ہو سکتی ہے۔

تیل کا دوسرا قطرہ سطح پر ڈال دینے سے کیا بات واقع ہوگی۔

۵۔ اگر ایک لہکا تا کا جسکے سر سے ایک دوسرے سے بانڈ ہوئے گئے ہیں مائع کی جہلی کے اندرونی حصہ کا ایک جزو ہو تو ثابت کرو کہ تاگے کے ہر نقطہ پر انحصار مستقل ہوگا۔

اگر تا کا وزنی ہو اور جہلی ایک انحصالی محور کے گرد گردش کرے تو ثابت کرو کہ محل توازن میں تاگے کا تناؤ ہوگا

$$\frac{L}{\pi r} \sqrt{r_1^2 - r_2^2}$$

جہاں اس کا طول  $L$ ، اس کا وزن فی اکائی طول  $w$  اور جہلی کا تناؤ  $T$  ہے۔

۶۔ صابون آئیز پانی کے ذخیرے سے مائع کی ایک مستوی جہلی اُٹھائی گئی ہے ثابت کرو کہ توانائی (ع) فی اکائی رقبہ کی عددی قیمت، تناؤ (ست) فی اکائی

طول کی عددی قیمت کے مساوی ہے -  
اگر جہلی ذخیرہ سے علیحدہ کر دی جائے اور اگر گڑ سے کمیت فی اکائی رتبہ تعبیر ہو تو ثابت کر دو کہ

ت = ع -  $\frac{\text{فرع}}{\text{فرع}}$  (کلرک میا کویلی)

۷۔ متعدد صابونی بلبے ایک ہی منبع سے اٹھائے گئے ہیں اور پھر ان کو ایک دوسرے سے ملا دیا گیا ہے ایسی مساوات معلوم کرو جس سے حاصل شدہ بلبے کا نصف قطر معلوم ہو سکے۔ اور ثابت کرو کہ سطح کا گھٹاؤ حجم کے اضافے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔

۸۔ پانی کا سطحی تناؤ جبکہ اس کے اوپر ہوا ہو ایسا ہے کہ ایک انچ پر کا زور تقریباً ۳۳ گرین وزن کے مساوی ہے۔ اگر ..... اکروی قطروں کے ملنے سے بارش کا ایک قطرہ  $\frac{1}{16}$  انچ قطر کا بنے تو ثابت کرو کہ سطحی تناؤں کا کام تقریباً ۱۲۷۷۰۰۰ فٹ پونڈ کے مساوی ہے۔

۹۔ اگر ایک جہلی اندرونی دبیرونی غیر مساوی دباؤں کے زیر اثر ایک گردشیں سطح بنائے تو نہایت کمزور نقطہ پر کے ماسی مستوی کا محور کے ساتھ میلان خاص مساوات

$$\frac{\text{ب}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم ف}$$

۱۰۔ — اے کے ایک قطرہ کا سطحی تناؤ یکساں ہے اسے ایک محور کے گرد گھمایا گیا ہے (۱۹۳)

سے حاصل ہوگا جہاں نقطہ ن سے محور پر کا عمود لا ہے اور ایک مستقل ہیں۔

ثابت کرو کہ سطح کا نصف انہاری معنی، معنی

$$1 - \frac{12}{1} = \frac{26}{23}$$

کے قطب کا گرد و نیل ( Roulette ) ہوگا۔

۱۱۔ دو صابونی بیلے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر بیرونی سطحوں کے نصف قطر  $r$ ،  $r_1$  ہوں اور اس دائرہ کا نصف قطر  $r_2$  ہو جس میں تینوں سطحیں قطع کرتی ہیں تو

$$\frac{1}{22} - \frac{1}{25} + \frac{1}{27} = \frac{3}{55}$$

۱۳۔ باریک سیدے تار کا ایک فریم ذوار بعتہ السطوح یا چار سطحی کی شکل کا ہے اس کو صابون اور پانی کے محلول میں داخل کر کے اوپر کھینچ لیا گیا ہے جس سے بعض صورتوں میں مستوی جہلیاں پیدا ہوتی ہیں جن کی ابتدائوں سے ہوتی ہے اور جو ایک نقطہ پر آکر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ہر چار سطحی کے لئے توازن کی یہ شکل ممکن نہیں ہے اور یہ کہ یہ اس وقت ممکن ہے جبکہ ایک رخ متساوی الاضلاع مثلث اور دوسرے رخ متساوی الساقین مثلثات ہوں جن کے زوایا اس میں سے ہر ایک  $120^\circ$  (۳-۳) سے کم ہو۔

۱۴۔ شیٹے کی دو متوازی تختیوں کے درمیان بہت ہی کم فاصلہ دہے۔ ان کے درمیان پانی داخل کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تختیاں ایک دوسرے کی طرف ایسی قوت سے کھینچ آئیں گی جو

$$۲ \text{ تجمعه} + \text{ب ت جب ع}$$

کے مساوی ہے۔ جہاں جلی کا رقبہ ۱ اور اس کا گھیراؤ ۲ ہے۔  
۱۵۔ شیٹے کا ایک کھوکھلا قائم مستطیر محروط متجانس مائع میں رکھا گیا ہے اسطوریہ کہ ایک محور امتصافی اور اس اوپر وار ہے۔ محروط میں کس بلندی تک مائع چڑھ سکا۔ اندرونی مائع کی سطح کی تقریبی مساوات معلوم کرو۔ اسطوانہ کی صورت میں نتائج اخذ کرو۔  
۱۶۔ ایک سوئی پانی پر تیر رہی ہے اس طور پر کہ اس کا محور پانی کی قدرتی ہموار سطح میں واقع ہے اگر غولاد کی کثافت اضافی بجاٹا پانی کے ذہ ہو اور قوت شعری کا زاویہ  $\theta$  ہو اور وہ زاویہ  $\phi$  ہو جو پانی کو مس کرنیوالی عمودی تراش کی قوس محور کے محاذی بناتی ہے تو ثابت کرو کہ

$$(۲ - \theta) \text{ جب } \frac{1}{\rho} = \text{جم عجم} \frac{1}{\rho} + (ع + \theta)$$

۱۷۔ ایک شعاری نلی گردش سطح کی شکل کی ہے اس کو امتصافی محور کے ساتھ ایک مائع میں جزو غرق کر دیا گیا ہے تکیوینی مسخنی کی مساوات معلوم کرو اگر مائع توازن میں رہے خواہ اس کا ارتفاع نلی میں کچھ ہی ہو۔

۱۷۔ ایک صابونی بلب کے ایک گیس کی کیت ک سے بھر دیا گیا ہے جس کا دباؤ پیمائش  
تیش پر  $m \times$  (اس کی کثافت) ہے۔ بلب کا نصف قطر  $d$  ہوتا ہے جبکہ اس کو ہوا میں کھدیا جا  
اس کے بعد بار پیا کا ارتقاع بڑھتا ہے اور تیش غیر متغیر رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ بلب  
کا نصف قطر بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے بوجہ اس کے کہ جہلی کا تناؤ

$$\frac{9}{8} \frac{m}{\rho d} \text{ سے زیادہ یا کم ہو۔}$$

۱۸۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$= \text{لامس (ای + ب)}$$

مائع کی جہلی کی ایک ممکن شکل کو تعبیر کرتی ہے جبکہ دونوں طرف دباؤ وہی ہو۔

۱۹۔ اگر دو سونیاں جو پانی پر تیر رہی ہیں متشاکلاً ایک دوسرے کے متوازی  
رکھ دی جائیں تو ثابت کرو کہ وہ بظاہر ایک دوسرے کی طرف کھینچ آئیں گی اور یہ کہ یہ عمل  
کشش سطحی تناؤ کی وجہ سے ہوگا۔

۲۰۔ ایک چھوٹا مکعب مائع میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ مکعب کی سطح کے ساتھ  
مائع کا زاویہ تماس منفرد ہے اور  $\theta$ ۔ عم کے مساوی ہے اور مکعب کا اسی پر کا رخ  
افقی ہے۔ اگر مائع کی کثافت  $\rho$  اور مکعب کی ضخیم اور اگر سطحی تناؤ  $\sigma$   $\theta$   $\rho$   
ہو تو ثابت کرو کہ مکعب تیرے گا اگر

$$\sigma > \frac{1}{4} \rho \left( \frac{1}{\theta} + 2 \right) \text{ جب } \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} \right)$$

۲۱۔ نصف قطر کے دو دائری قرص اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے کستہ  
ان کے مرکروں کو ملانے والے خط پر عمود ہیں۔ ان قرصوں کے محیطوں کو صابوں  
کی ایک جہلی سے ملا دیا گیا ہے جس کے اندر اتنی کیت کی ہوا ہے جتنی کہ اسی کرہ  
ہوائی میں ج نصف قطر کے ایک کرہ کو عین بھر سکتی ہے۔ اگر جہلی اسطوانہ  
کی شکل کی ہو جبکہ قرصوں کے درمیان فاصلہ  $b$  ہو تو ثابت کرو کہ قرصوں کے درمیان

فاصلے کو  $\theta$  تک گھٹانا ہوگا تاکہ جہلی کو ہی شکل اختیار کرے جہاں

$$\left\{ \frac{2b^2 - 8ab + 8a^2}{2a + 2b} + 2b - 8a \right\} (2a + 2b)$$

$$= 2b^2 - 8ab + 8a^2$$

۲۲۔ تاروں کا ایک فریم ب ارتفاع کے منشور کی شکل کا ہے جس کے قاعدے صلع و کے متساوی الاضلاع مثلث ہیں۔ اگر اس فریم کو صابون آمیز پانی میں ڈبو دیا جائے تو توازن کی حالت میں مستوی جلیوں کی ترتیب آتی تشریح کرو۔ مستوی جلیوں کی صورت میں توازن کے امکان کے لئے ثابت کرو کہ ب، وکرما سے بڑا ہونا چاہیئے۔

۲۳۔ سیال کی ایک جہلی دو ایسے تاروں کو چپکی ہوئی ہے جن میں سے ہر ایک مرغولہ (Helix) کا ایک پیر (Turn) ہے دونوں مرغولوں کے محور ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور ان کے کام (Steps) مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ جہلی کے توازن کی شرط پوری ہوگی اگر محور میں سے گزرنیوالی جہلی کی کسی تراش کی تقریقی مساوات

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} \sqrt{\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}}$$

کی شکل کی ہو جبکہ ۲، ۳ = ہر مرغولہ کا کام یعنی دو متسللہ چڑیوں (Threads) کا درمیانی فاصلہ۔

۲۴۔ تار کے ایک مرغولہ کی گھائی ماب ہے اور اس کا طول بمقابلہ اس کے قطر کے بہت بڑا ہے اس کے محور کے سروں سے ایک پچھلے ڈوری (پچ کی قدر ۶) ابلدہ دی گئی ہے تار کے ہر سرے کو نصف قطر کی سمت میں موڑ دیا گیا ہے تاکہ وہ محور سے جائے۔ ڈوری جب سیدھی ہوتی ہے تو جیت لیکن بے تنی ہوئی ہوتی ہے اگر مرغولہ اور ڈوری کو صابون کے محلول میں ڈبو کر نکال لیا جائے تو ایک جہلی تار اور ڈوری سے چپکی ہوئی نکلتی ہے ثابت کرو کہ سروں کے نزدیک کے حصوں کے سوا ڈوری نصف قطر کے ایک مرغولہ میں گھنچ جاتی ہے جہاں مساوات (۱۶) ۲، ۳ = ۲، ۴ - ۲، ۵ (۲، ۶ + ۲، ۳) ثابت ع ۲

+ ۸ ف ۲ ت ۲ ر ۲ + ۸ ف ۲ ت ۲ ع ر + ۸ ف ۲ ت ۲ =  
سے حاصل ہوتا ہے جہاں صابون کی جہلی (کے دونوں سطحوں) کا کل تناؤ فی اکانی طول  
ت سے تعبیر ہوتا ہے۔

۲۵ — ایک مستوی تختی مائع میں جزو غرق کر دی گئی ہے۔ مائع کی کثافت  $\rho$  اور  
سطحی تناؤ  $\sigma$  ہے۔ مائع اور تختی کے مابین کے لئے قوت شعری کا زاویہ  $\theta$  ہے اور  
تختی افقی کے ساتھ زاویہ  $\alpha$  کا میلان رکھتی ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی ساکن سطح کے اوپر  
تختی کے دونوں رخوں پر مائع کے ارتقاؤں کا فرق ہے

$$2 \left\{ \frac{\sigma}{\rho} \right\} \text{ جب } \theta = 0 \text{ جب } \theta = \pi$$

۲۶ — ایک فریم  $AB$  ج د میں سیدھے تاروں  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  سے  
بنایا گیا ہے اور ان کو ایک مرغولہ  $D$  کی قوس سے ملا دیا گیا ہے مرغولہ کا زاویہ  $\theta$   
ہے۔ مرغولہ کا محور  $B$  ج ہے اور  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$ ، طول  $l$  کے نصف قطر ہیں۔ اگر  
فریم کو صابون کے محلول میں ڈبو دیا جائے تو ثابت کرو کہ ایک جہلی پیدا ہوگی جس کی  
سطحی توانائی ہوگی

$$\frac{\sigma}{2} \{ (1 + \frac{1}{2}) \}$$

جہاں سطحی تناؤ  $\sigma$  ہے اور  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  کے درمیان چھوٹا زاویہ  $\theta$  ہے۔

(۱۹۵)

۲۷ — کثافت  $\rho$  اور سطحی تناؤ  $\sigma$  کا ایک سیال  $1$  نصف قطر کی ایک شعاری  
نلی میں اوپر کھینچا گیا ہے جس کے ساتھ براویہ تماس  $\theta$  ہے۔ اگر  $h$  ج  $\theta$   $\sigma$  تو  
ثابت کرو کہ نلی کے محیط پر سیال جس ارتفاع تک چڑھ جاتا ہے وہ ہے

$$\frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \right) - \frac{\sigma}{\rho} \cos \theta - \frac{\sigma}{\rho} \sin \theta$$

جہاں  $\theta$  کی تیسری اور اعلیٰ توتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

۲۸ — بیستی کثافت  $\rho$  کے تجاذبی مائع کا حجم  $\frac{1}{2} \pi R^2$ ،  $\pi R^2$  دباؤ پر کے





اور بجلی حد ایک وزنی لچکدار تاکا ہے جو نصف قطر کے ایک افقی دائرہ کی شکل میں آزادانہ ٹھک رہا ہے۔ تاکے کا قدرتی طول ۱۱۲ ڈا اس کے لچک کی قدر لہ اس کا وزن ۱۱۲ ڈا اور جہلی کا تناؤ رت ہے۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$(L^2 - 4a^2) = 2L^2 + (L^2 + 4a^2) = 0$$

کو پورا کرتا ہے۔

۳۴۔ مانع کی ایک جہلی بیرونی طرف سے ایک ایسے بند استوار تار سے محدود ہے جس کے (تار کے) منحنی کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری نہیں جہلی کی اندرونی حد ایک بند لائم تاکا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر تاکے کا نصف قطر انحناء مستقل ہے اور یہ کہ مرڈر (Torsion) کا نصف قطر جہلی کے اس نقطہ پر کے کسی ایک صدی نصف قطر انحناء کے عرڈاً مساوی ہے۔

۳۵۔ تار کے ایک دائرہ کو نصف قطر (۱) صابون آمیز پانی کی سطح میں رکھ کر آہستہ آہستہ اٹھایا گیا ہے تاکہ اس کے ساتھ ایک جہلی اٹھ آئے۔ اس کے وزن کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ جہلی کی نصف النہاری قرائش ایک زنجیرہ ہے۔ جہلی پانی کی ہوا سطح کو جس زاویہ پر ملتی ہے اس کو معلوم کرو۔ نیز ثابت کرو کہ نصف النہاری منحنی کا سیدل جبکہ جہلی کا رقبہ ۱۱۲ ڈا کے مساوی ہو کر رہی ہے جہاں ی

$$\text{حمزہ ی} + \text{ی} (\text{ی} - ۱) = \text{ی}^۲$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

(۱۹۶) ۳۴۔ شعاری نلی کا سر اجب پانی میں ڈبو دیا جاتا ہے تو پانی ف ارتفاع تک اس میں چڑھ جاتا ہے۔ نلی کو پانی سے ہٹا لیا جاتا ہے اور نصف قطر کا ایک قطر اس کے سر سے بیرون دار ہوتا ہے اگر نلی میں تھیم ہوئے پانی کا طول قطرہ کی تہ سے نلی کے اندرونی آبی ستون کی چوٹی تک فٹ ہو تو ثابت کرو کہ سطحی تناؤ مضط

$$۲ \text{ فٹ / ج ڈف} = (ف - ف) - \frac{۱}{۲} ف$$

سے حاصل ہوگا جہاں کثافت کو مث تبخیر کرتا ہے اور یہ مان لیا گیا ہے کہ قطرہ کرومی ہے۔  
 ۳۵ — دوداگری پچھلے جن کا مشترک محور ان کے مستویوں پر علی التوا قائم ہے مانع کی ایک بند جلی کو تھامی ہوئی ہیں۔ جہلی کی اندرونی ہوا بیرونی ہوا سے زیادہ دباؤ پر ہے۔ ثابت کر دو کہ جہلی کے سرے نصف قطر  $\frac{1}{2}$  کے گڑے ہیں اور جہلیوں کی درمیانی سطح ایک گردغشی سطح ہے جس کے نصف انہناری سطح کی ذاتی مساوات جب  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$  ہے جہاں محور کے ساتھ عماد کا سیلان قائم ہے اور فاصلہ محور سے لایا ہے۔

۳۶ — اگر مانع دو ستوازی انتہائی تختوں کے درمیان شعاری عمل سے اوپر کھینچا جائے تو ثابت کر دو کہ ساکن سطح کے اوپر آزاد سطح کے کسی نقطہ پر چڑھاؤ / ف / طن / م / ہے جسے جہاں ماس کا ارتفاع ف اور آزاد سطح کی قوس س ہے جو اس کے ثابی گئی ہے، سطحی تناؤ  $\frac{1}{2}$  ج ث م کے مساوی ہے اور مقیاس ک =  $\frac{1}{2}$  (ف + م) /

۳۷ — نصف قطر کا ایک طویل مستدیر اسطوانہ مانع میں کلا غرق ہے مانع کے ساتھ اس کا حادہ زاویہ تماس عد ہے۔ اس کے محور کو افقاً رکھ کر اس کو بند برج مانع سے نکالا گیا ہے ثابت کر دو کہ مانع کی ابتدائی اور انتہائی ہموار سطح کے اوپر ف ارتفاع تک جب اسطوانہ کا محور پہنچ جاتا ہے تو مانع کے ساتھ تماس ٹوٹ جاتا ہے جہاں ف مساواتوں

$$ف = \text{رجم (ف - عد)} + م \text{ جم } \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ (ف - عد)} + 2 \text{ جم } \frac{1}{2} - \text{مسز } 1 \text{ جم } \frac{1}{2}$$

$$= 2 \text{ جم } \frac{1}{2} - \text{مسز } 1 \text{ جم } \frac{1}{2}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور سطحی تناؤ کو مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ  $\frac{1}{2}$  ج م ہے

۳۸۔ پانی کا ایک قطرہ شیشے کی ایک افقی تختی کی پجلی سطح سے ٹک رہا ہے اگر سطحی تناؤ کو پانی کے نوعی وزن کے ساتھ نسبت مہ ہو اور  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ مہ (فرز/فرس)}$  جہاں قطرہ کے نصف الہناری منحنی کی قوس س ہے اور ذہ زاویہ ہے جو نصف الہناری منحنی کا ماس افق سے بناتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$(\text{جب ذہ} + \text{عہ}) (2 \text{ جب ذہ} + 3 \text{ عہ}) = 2 \text{ مس ذہ (قطرہ) مس ذہ} \times \text{عہ} + \text{عہ} + \text{عہ}$$

$$\left( \frac{2 \text{ قطرہ ذہ} + 2}{\text{مس ذہ}} \right) + \left( \frac{2 \text{ قطرہ ذہ} + 2}{\text{مس ذہ}} \right) + \text{عہ} + \text{عہ}$$

جہاں  $\text{عہ} = \text{فرہ/فرز}$  ،  $\text{عہ} = \text{فرہ}^2 / \text{فرز}$  ، اگر مہ کامربع نظر انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ نصف الہناری منحنی کے انحناء کا مربع ہے

$$\frac{\text{قو}^2 \text{ فرلا}}{\text{لا} (1 - \frac{1}{4} \text{ لا})} = \frac{\text{قو}^2 \text{ فرلا}}{\text{لا} (1 - \frac{1}{4} \text{ لا})}$$

جہاں  $\text{لا} = \frac{1}{4} \text{ مس ذہ}$  اور نقطہ الشطاف پر لا کی قیمت لا ہے۔

۳۹۔ زاویہ راس ۲ کا ایک طویل فائدہ پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا قاعدہ افقی اور اس کا اوپر کا کنارہ پانی کی قدرتی ہوا سطح میں ہے۔ اگر سروں پر شعاعی عمل نظر انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{وہ} = 2 \text{ قطرہ (جب مہ + جم جہ)}$$

جہاں فائدہ کا وزن فی اکائی طول و اس کے مساوی حجم کے پانی کا وزن و سطحی تناؤ مت اور قوت شعری کے زاویہ کا مکمل جہ ہے۔

۴۰۔ حجم کے پارہ کا ایک قطرہ بغیر بیرونی قوتوں کے عمل کے شیشے کی دو متوازی تختیوں کے درمیان دبا گیا ہے۔ تختیوں کا درمیانی فاصلہ سطحی تناؤ مت شیشے اور پارہ کے لئے زاویہ تماس نہ ہے۔ ثابت کرو کہ مطلوبہ دباؤ کی مقدار

$$2 \pi \text{ مہ} / (1 - \text{مہ})$$

ہے جہاں  
 $f = 2\pi r$  (طن ۲۔ م) فرء  $h = 2\pi r$  (طن ۲۔ م) طن ۲ فرء

اور  $m = \Delta \left( \frac{h}{p} \right) = \text{حم مد مم (نہ + خط م) لے}$   
 جب تختیاں ایک دوسرے سے بہت نزدیک ہوں تو ثابت کرو کہ دباؤ پہلے تقرب تک  

$$\frac{2\pi r}{f} = \frac{2\pi r}{f}$$
  
 ہے۔

۴۱۔ سیال کا ایک قطرہ جو کسی قوتوں کے زیر عمل نہیں سوائے یکساں بیرونی دباؤ اور سطحی تناؤ کے ایک استوار جسم کی طرح ایک محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ ثابت کرو کہ سطح پر  $\frac{r}{2} - \frac{1}{2}$  مستقل ہے جہاں  $r$  سما سطح کے صدری قطر انھا ہیں۔  
 ۴۲۔ جب سما محوری نیچے دار انتضائی ہو اور سدا مناسب منتخب کیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ  $r$  سما کثافتوں کے دو سیالوں کی سطح فاصلہ اس ربط

$$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$$

کو پورا کرتی ہے۔ جہاں انھا کے صدری نصف قطر  $r$  سما ہیں جن کو مثبت قرار دیا گیا ہے جبکہ تقریبی دار ہو،  $r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$  (م۔ م) اور درمیانی رخ کا شعاعی مستقل ہے۔

اگر سطح محوری کے گرد گردش سطح ہو تو ثابت کرو کہ محور کے نزدیک کے حصہ کی تقریبی مساوات (اسطوائی محدود میں)

$$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$$

کی شکل کی ہوگی اور بتاؤ کہ جب نلی میں بائع ہو تو ایسی صورت میں ہی زاویہ تماس کی رقم میں کس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

## باب یازدہم

گھومنے والے مائع کا توازن جس کے ذرات ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں

۱۸۶ — اگر مائع کی کچھ کمیت جس کے ذرات ایک معین قانون کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں یکساں رفتار سے ایک ثابت محور کے گرد گھومنے تو آزاد سطح کی کسی خاص شکل کے لئے یہ قرین قیاس ہے کہ مائع کے ذرات اضافی توازن کی حالت اختیار کر سکتے ہیں۔ بہر کیف چونکہ کسی ذرہ پر کل کمیت کی حاصل کشش عام طور پر اس کی شکل پر منحصر ہوگی جو غیر معلوم ہے اس لئے اس مسئلہ کا مکمل حل حاصل نہیں کیا جاسکتا۔

کشش کے کسی اختیاری طور پر مقرر کردہ قانون کی صورت میں یہ مسئلہ محض نظری دلچسپی کا باعث ہو سکتا ہے۔ لیکن جب یہ قانون تجاذب کا قانون ہو تو اس کی اہمیت بڑھ جاتی ہے کیونکہ طبیعی ہیت کے ایک مسئلہ سے اس کا تعلق ہے۔

ہم سیال کو متجانس خیال کریں گے اور اپنی توجہ صرف دو صورتوں تک محدود رکھیں گے۔ پہلی صورت میں تجاذبی قوتوں کا فاصلے کے متناسب ہونا اور دوسری صورت میں نیوٹن کے کلیہ کی باندی کرنا فرض کر لیا جاتا ہے۔

۱۸۷ — متجانس مائع کی کچھ کمیت اپنی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہی ہے۔ اس کے ذرات ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتے ہیں جو ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ آزاد سطح کی شکل متعین کرنا مطلوب ہے۔ کسی ذرہ پر کی حاصل کشش اس فاصلے کی سمت میں اور اس کے متناسب ہے

جو ذرہ اور کمیت کے مرکز کے درمیان ہے، اور اگر سیال کی کل کمیت کا ناپ  $m$  ہو تو نقطہ لا، ما، ی پر کے سیالی ذرہ پر حاصل کشش کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی، مدلا، مدما، مدی سے تعبیر ہو سکتے ہیں۔  
مبدأ کو مرکز ثقل پر لینے سے اور گردش کے محور کو محوری قرار دینے سے توازن کی مساوات ہے

$$F = \{ (m'd - m'l) + (m'm - m'a) - m'iy \} \quad \text{اور اس لئے}$$

$$d = r + \frac{1}{4} \{ (m'd - m'l) + (m'm - m'a) - m'iy \}$$

آزاد سطح پر دھنریا مستقل ہے اور آزاد سطح کی مساوات ہے

$$(1 - m') (m'd + m'a) + m'iy = l$$

مستقل لی سیال کی کمیت برابر  $m$  سے پر منحصر ہوگا۔

$m$  سے جب بہت چھوٹا ہوتا ہے تو آزاد سطح تقریباً کرومی ہوتی ہے اور جیسے جیسے  $m$  صفر سے مد تک بڑھتا ہے تو کرومی سطح قطبین پر زیادہ ترجیحی ہوتی جاتی ہے۔ جب  $m' = m$  تو آزاد سطح دو مستویوں پر مشتمل ہوتی ہے اس کو ممکن بنانے کے لئے ہم یہ تصور کر سکتے ہیں کہ سیال ایک اسطوانی سطح کے اندر گھرا ہوا ہے جس کا محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔

جب  $m' < m$  تو آزاد سطح دائرہ نما دو چادری ہوتی ہے جو  $m$  کی ایک خاص قیمت ( $m'$ ) کے لئے مخروط بنجائی ہے اور سیال اس فضا کو پر کرتا ہے جو مخروط اور اسطوانے کے درمیان ہے۔ سیال کے حجم کو محسوب کر کے  $l =$  رکھنے سے  $m$  کی قیمتیں ہو سکتی ہیں کیونکہ اس صورت میں مبدأ پر دباؤ معدوم ہو جاتا ہے۔ اگر  $m' > m$  تو آزاد سطح دائرہ نما ایک چادری ہوتی ہے جو جیسے مد بڑھتا ہے اسطوانہ کی شکل کے قریب آتی ہے اور اس لئے  $m$  کی بڑھی قیمتوں کے لئے یہ قیاس کرنا ضروری ہے کہ اسطوانہ جس کے اندر سیال ہے اپنے سرور پر بند ہے۔

اس دفعہ کے نتائج غیر متجانس سیال پر بھی صادق آتے ہیں خواہ متواتر طبقات میں کثافت کے تغیر کا قانون کچھ ہی ہو۔

۱۸۸ — متجانس مائع کی کچھ کمیت جس کے ذرات کلیہ نیوٹن کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں اعنانی توازن کی حالت میں ابہنی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہی ہے۔ سطح کی ممکن شکل معلوم کرنا مطلوب ہے۔

اس مسئلہ کا ٹھیک حل دریافت کرنا ممکن نہیں جس کی وجہ اوپر بتلاد ہی گئی ہے لیکن یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ پیٹا (Oblate) کرونا توازن کی ممکن شکل ہے۔ فرض کرو کہ کرونا کی مسادات ہے

$$1 = \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{(a^2 + b^2)} = 1$$

جہاں گردش کا محور  $z$  ہی ہے۔ تب نقطہ  $(a, b, c)$  پر کے دزہ پر مبداء کی سمت میں محاور کے متوازی حاصل کششیں بالترتیب

$$X = \frac{2\pi^2 \rho}{3} \{ (a^2 + b^2) - c^2 \} z$$

$$Y = \frac{2\pi^2 \rho}{3} \{ (a^2 + b^2) - c^2 \} z$$

$$Z = \frac{2\pi^2 \rho}{3} \{ (a^2 + b^2) - c^2 \} z$$

سے تعبیر ہو چکی ہے۔

۱۹ — لاپلاس کی (Mecanique Celeste) پانسن کی (Mecanique) ڈیہیل کی

(mecanique) اور ڈاؤنہم کی سکونیات میں یہ جملے ملتے۔ موزالذہ کتاب میں کہہ نما

کی مسادات  $(a^2 + b^2) - c^2 = 1$  لیکن  $a^2 + b^2 = 1$  لیکن  $a^2 + b^2 = 1$  رکھنے سے  
متذکرہ بالا جملے حاصل ہو جاتے ہیں۔

توازن کی مساوات ہے

$$\text{فرد} = \text{ث} \{ (\text{سہ}^2 - \text{لا}^2) \text{ فرلا} + (\text{سہ}^2 - \text{ما}^2) \text{ فرما} - \text{سے فری} \}$$

لیکن کرہ نما کی مساوات سے

$$\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + (\text{لا}^2 + \text{ما}^2) \text{ ی فری} = ۰$$

اور چونکہ اسکو مساوی دباؤ کی سطح ہونا چاہیئے اس لئے

$$\text{سہ}^2 - \text{لا}^2 = \text{سہ}^2 - \text{ما}^2 = - \text{سے} / (\text{لا}^2 + \text{ما}^2) \text{ ی}$$

پس میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{سہ}^2}{\text{ث}^2} = \frac{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) \text{ مست}^2 \text{ لا} - \text{لا}^2}{\text{لا}^2} - \frac{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) \text{ مست}^2 \text{ لا} - \text{لا}^2}{\text{لا}^2}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{سہ}^2}{\text{ث}^2} = \frac{(\text{سہ} + \text{لا}^2) \text{ مست}^2 \text{ لا} - \text{سہ}^2}{\text{لا}^2} \dots \dots \dots (\text{عہ})$$

اگر سہ اور ث دئے جائیں تو اس مساوات سے لہ متعین ہو جاتا ہے اور پھر کرہ نما کے نیم محوروں کی باہمی نسبت معلوم ہو جاتی ہے۔  
اصلی حل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{ما} = \frac{(\text{لا}^2 + \text{سہ}^2) \text{ مست}^2 \text{ لا} - \text{سہ}^2}{\text{لا}^2} \dots \dots \dots (\text{بیہ})$$

مست<sup>لا</sup> کی بجائے اس کے سلسلے کو بدرجہ کرنے سے جسے ہم جانتے ہیں کہ مست<sup>لا</sup>

ہے جبکہ لا > ۱ حاصل ہوتا ہے

بقیہ نوٹ صفحہ (۳۰۷) کے استعمال سے غیر منطقی مقداروں شامل نہیں ہونیں۔ مانع<sup>لا</sup> شکل

کیلون اور ٹیٹ (Natural Philosophy) کے دفعہ ۵۲۷ میں اور راوتھ کی تخلیقی سکونیات

حصہ دوم صفحہ ۲۱۹ میں مندرج ہیں۔



$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{(n^2+1)(n^2+4)} = 1 \quad \text{..... (جہ)}$$

$$\text{نیز فرما} \quad \frac{(9+4)}{4} - \frac{(9+1)}{(1+4)} = \text{سن لا}$$

$$\text{(گم)} \quad \left\{ \text{سن لا} - \frac{9+4}{(9+1)(1+4)} \right\} = \frac{9+4}{4}$$

$$= \frac{9+4}{4} \text{ ف (لا)}$$

جہاں

$$\text{ف (لا)} = \frac{9+4}{(9+1)(1+4)} - \text{سن لا}$$

(۱۰۱)

اشکال (جہ) اور (بہ) سے ظاہر ہے کہ بالترتیب لا = - اور لا = ∞ کے لئے  
نامعلوم ہو جاتا ہے۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ جیسے لا صفر سے بڑھتا ہے تو ما ایک  
اور صرف ایک قیمت اعظم اختیار کرتا ہے۔

فرما کی علامت صرف ف (لا) کی علامت پر منحصر ہے،

نیز جب لا = ۰ تو ف (لا) = ۰

اور جب لا = ∞ تو ف (لا) = -∞

نیز ہمیں حاصل ہوتا ہے

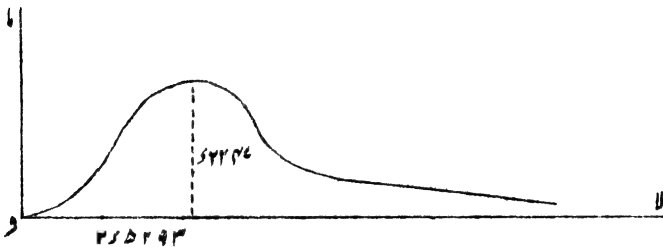
$$\text{ف (لا)} = \frac{9(4-3)}{(9+1)^2(1+4)}$$

اور یہ لا = ۰ سے لا = ∞ تک مثبت ہے اور اس سے بڑی لا کی تمام قیمتوں  
کے لئے منفی، پس ف (لا) مثبت ہونے سے ابستہ کرتا ہے اور اس وقت  
تک بڑھتا ہے جب تک لا = ۳ تک بڑھ جاتا ہے لیکن لا کی اس سے بڑی قیمتوں کیلئے  
ف (لا) مسلسل گھٹتا ہے۔ اس لئے ف (لا) لا کی ایک ایسی قیمت کے

لئے معدوم ہوتا ہے جو ۳۱۵ سے بڑی ہے۔ جدولوں کی مدد سے ہم باسانی دیکھ سکتے ہیں کہ (۲) مثبت ہے اور (۳) منفی، اس لئے مطلوبہ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے۔ نیز (۲۵۵) = ۰.۰۲۵ تقریباً اور

$$\text{نیوٹن کے طریقہ تقریب سے } ۲۵۵ - \frac{(۲۵۵)}{(۲۵۵)} \times ۰.۰۲۹۳ =$$

$$۲۵۵.۲۹۳ \dots =$$



پس  $\frac{1}{u}$  صرف اس وقت معدوم ہوتا ہے جبکہ  $۲۵۵.۲۹۳ \dots =$

اور اس وقت  $u$  اعظم ہے اور اس کی قیمت  $۰.۰۲۲۴$  ہے۔

اس لئے مساوات (۲) کی ترسیم اس شکل کی ہوگی جو تصویر میں دکھائی گئی ہے لیکن اس میں معین کا پیمانہ فضلہ کے پیمانہ سے بڑا لیا گیا ہے۔

پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر  $u/2$  ٹ  $۰.۰۲۲۴ < ۰.۰۲۲۴$  تو چپٹا کرہ نما توازن کی ممکن شکل نہیں ہو سکتا۔ لیکن اگر  $u/2$  ٹ  $۰.۰۲۲۴ > ۰.۰۲۲۴$  تو دکرہ نمائی اشکال ممکن ہیں کیونکہ  $۰.۰۲۲۴$  سے کم، معین کی ہر قیمت کے جواب میں فضلہ کی دو حقیقی قیمتیں لہ، لہ حاصل ہوتی ہیں۔

۱۸۹۔ کرہ نمائی اشکال کی ہلیسیجیت۔ جب لہ کی دو حقیقی قیمتیں لہ، لہ (۲۰۲)

ہوں تو ایک  $۲۵۵.۲۹۳$  سے بڑی اور دوسری اس سے کم ہوگی۔ فرض کرو کہ لہ  $< لہ$  تو جیسے  $u/2$  ٹ گھٹتا ہے لہ گھٹتا ہے اور لہ بڑھتا ہے (دیکھو شکل)

اور چونکہ  $\frac{1}{2} \pi \leq 293.5$  اس لئے  $\frac{1}{2} \pi + 1 \leq 294.5$  لیکن نیم محوروں میں نسبت  $\frac{1}{2} \pi + 1$  : ۱ ہے اس لئے  $\frac{1}{2} \pi$  کی بڑی قیمت ہمیشہ بہت زیادہ چھپے کرہ نما کو تعبیر کرتی ہے اور  $\frac{1}{2} \pi$  ث کے ہم جتنا زیادہ چھوٹا لیں وہ کرہ نما زیادہ تر چپٹا ہو جاتا ہے جو اصل  $\frac{1}{2} \pi$  کے متناظر ہے۔  
 نیز  $\frac{1}{2} \pi$  ث کی چھوٹی قیمتوں کے لئے اصل  $\frac{1}{2} \pi$  چھوٹی ہوگی اور اگر وہ کرہ نما کی ہیلیجیت کو تعبیر کرے تو

$m(1+v) = m(1+\frac{1}{2}\pi)$  اس طرح  $v = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi$  تقریباً اور اس لئے مساوات (ج) سے

$$\frac{1}{2}\pi \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{(1+n^2)(3+n^2)} \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$$

صہ کی پہلی قوت تک - یا

$$v = \frac{1}{2}\pi \approx \frac{1}{15} \approx \frac{1}{2}\pi \text{ تقریباً}$$

میکارن پہلا شخص تھا جس نے یہ ثابت کیا کہ متجانس سیال کی کمیت جبکہ وہ گھوم رہی ہو تو توازن کی ممکن شکل چپٹا کرہ نما ہوتی ہے اور اس لئے ان کرہ نماؤں کو عام طور پر میکلاڈن کے کرہ نما کہتے ہیں۔

۱۹۰۔ ایسے سیال کی صورت میں اس مسئلہ کا استعمال جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے۔

اگر ہم فی الحال زمین کو نصف قطر کا ایک کرہ مابین اور اس کی اوسط کثافت کو  $\frac{1}{2} \pi$  سے تعبیر کریں تو اس کی سطح پر کی کشش  $\frac{1}{2} \pi$  ث سے تعبیر ہوگی۔  
 اس سے قطب پر جاذبہ ارض کی قوت (ج) کی بھی پیمائش ہو جاتی ہے۔

لے ڈارون کی کتاب Scientific Papers جلد سوم کے صفحہ ۲۲۳ میں  $\frac{1}{2} \pi \approx \frac{1}{15}$  ث کی قیمت ہیلیجیت کی تیسری قوت تک حاصل کی گئی ہے۔

مس-گ-مس نظام کی اکائیوں میں ج = ۹۸۰ تقریباً اور ۲۲۲ = ۴ × ۹۰ سنٹی میٹر۔  
اس لئے ہینٹی اکائیوں میں

$$\text{ف} = ۳ / \text{ج} = ۲۲۲ / ۹۸۰ \times ۳۶۵۵ = ۹۶۰$$

اگر ہم کرہ نمائی شکل کے لئے سہ / ۲ ف کو اس کی انتہائی قیمت ۲۲۳۷ کے مساوی لیں اور ف کی متذکرہ بالا قیمت کو استعمال کریں تو موری گردش کا وقت ۲۲ / سہ = ۲ گھنٹے ۲۵ منٹ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ قلیل ترین وقت ہے جس میں کچھ متجاش کیت جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے یکساں رفتار سے ایک چھٹے کرہ نمائی شکل میں گھوم سکتی ہے۔

پھر اگر ہم سہ کی بجائے زمین کی زاویائی رفتار  $\frac{۲۲}{۲۹۰ \times ۲۲}$  استعمال کریں تو

$$\text{ف} = \frac{۹۰ \times ۲۲}{۳۶۵۵ \times ۲۹۰ \times ۲۲} = ۰۰۲۳ \text{ تقریباً}$$

جو انتہائی قیمت ۲۲۳۷ سے کم ہے اس کثافت اور اس زاویائی رفتار کے لئے دوکرہ نمائی اشکال ممکن ہیں کیونکہ ان کی دو حقیقی قیمتیں ملتی ہیں جیسا کہ دفعہ (۱۸۸) میں واضح کر دیا گیا ہے۔ بڑی قیمت ایک بہت چھٹے کرہ نمائی کے متناظر ہے اور چھوٹی قیمت سے ایک ایسا کرہ نمائی حاصل ہوتا ہے جس کی ہیلیجیت ۱۸۹ کی رو سے ہے

$$\frac{۱}{۲۳۲} = \frac{۱۵}{۲۱۶} = ۰۰۲۳ \times \frac{۱۵}{۸} \text{ یا تقریباً}$$

علم مساحت الارض سے ہم جانتے ہیں کہ زمین اپنی شکل میں ایک کرہ سے بہت ہی کم فرق رکھتی ہے کیونکہ اس کی ہیلیجیت  $\frac{۱}{۲۹۹۱۵}$  ہے یعنی کرہ نمائی

لے دیکھو انسائیکلو پیڈیا بری ٹانیکا میں (A. R. Clarke) اور (F. R. Helmert) کا

مضمون (Figure of the Earth)

کے محوروں میں نسبت  $۳۰۰.۵۱۵ : ۲۹۹.۵۱۵$  ہے۔  
 اب یہ واقعہ کہ متجانس سیال کے ایک کرہ نما کے محور جس کی کثافت زمین کی اوسط  
 کثافت کے مساوی اور جس کی گردش کا وقت زمین کی گردش کے وقت کے مساوی  
 ہو  $۲۳.۳۲ : ۲۳.۳۲$  کی نسبت رکھتے ہیں یہ بتاتا ہے کہ یہ بالکل خارج از امکان  
 ہے کہ زمین اپنے دور حیات میں کسی وقت ایک متجانس سیال کی کمیت تھی۔  
 ۱۹۱ — لمبو ترا کرہ نما ممکن شکل نہیں۔ یہ معلوم رہے کہ ہم نے اضافی توازن  
 کی حالت میں گھومنے والے سیال کی شکل کے عام مسئلہ کو حل نہیں کیا ہے بلکہ  
 صرف یہ دکھایا ہے کہ اگر  $۲۲.۲$  ث  $> ۲۲.۲۴$ ، تو چپٹے کرہ نما ممکن شکل  
 ہے۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ نتیجہ سیال کی مقدار کمیت پر منحصر نہیں بلکہ صرف  
 کثافت اور زاویہ رفتار پر منحصر ہے۔ اگر  $۲۲.۲$  ث  $< ۲۲.۲۴$ ، تو اس سے  
 نتیجہ نہیں نکلتا کہ توازن ناممکن ہے بلکہ صرف یہ کہ اس صورت میں چپٹے کرہ نما  
 شکل ممکن نہیں ہے۔  
 اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ آیا لمبو ترا کرہ نما ممکن شکل ہے یا نہیں ہم دفعہ (۱۸۸)  
 میں اکی بجائے۔ لہ لکھتے ہیں جہاں کہ ہونا چاہیے  $>$  تب اس دفعہ  
 کی (۱) اور (ج) مساواتوں سے

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{N_n}{(1+N_2)(3+N_2)} = \frac{N_2}{2}$$

جو ناممکن ہے کیونکہ مساوات کے طرفین مختلف العلامت ہیں۔ پس لمبو ترا  
 کرہ نما ناممکن کی ممکن شکل نہیں ہو سکتا۔

۱۹۲ — پائے (Tome II p. 547) یہ بتایا ہے کہ بیرونی قوتوں کے زیر عمل ساکن  
 سیال کی مساوی دباؤ کی سطحوں اور ایسے سیال کی مساوی دباؤ کی سطحوں کے درمیان  
 ضروری فرق ہوتا ہے ذرات کی ایک دوسرے کو جذب کرنے والی قوتوں کے  
 زیر عمل ساکن ان کے زیر عمل ثابت محور کے گرد یکساں رفتار سے

گھوم رہا ہے۔

فرض کرو کہ (ب ج) آزاد سطح اور (د ع) ف مساوی دباؤ کی کوئی سطح ہے تب پہلی صورت میں (د ع) ف کے کسی نقطہ پر کی حاصل قوت اس نقطہ پر سطح کے عمود وار ہے اور (ب ج) اور (د ع) ف کے درمیان سیال کے وجود سے غیر متاثر رہتی ہے۔ اس لئے اگر اس سیال کو نکال دیا جائے تو اس سیال کے توازن پر کسی قسم کا اثر نہیں پڑیگا جو (د ع) ف سے ملحد دہے۔ دوسری صورت میں (د ع) ف کے کسی نقطہ پر کی قوت اگرچہ کہ اس نقطہ پر سطح کے عمود وار ہے لیکن (د ع) ف کے اندرونی سیال کی کمیت کی اور (د ع) ف اور (ب ج) کے درمیان سیال کی کمیت کی کششوں کا حاصل ہے، حاصل قوت کے ان دو اجزا ترکیبی کا سطح کے عمود وار ہونا ضروری نہیں اور عام طور پر (د ع) ف کے بیرونی سیال کو بقیہ سیال کے توازن پر اثر ڈالے بغیر علیحدہ نہیں کیا جاسکتا۔

لیکن اگر سیال متجانس ہو اور ذرات کلیہ نیوٹن کے بوجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہوں اس طرح کہ آزاد سطح کرہ بنا ہو تو مساوی دباؤ کی سطح متشابہ کرہ بنا ہوگی اور ایسی صورت میں چونکہ دو ہم مرکز متشابہ اور متشابہات متشابہ ناقص بناؤں سے گھرے ہوئے ناقص نمائی خول کی حاصل کشش اس کے اندرونی نقطہ پر صفر ہوتی ہے اس لئے (ب ج) اور (د ع) ف کے درمیان سیال کو علیحدہ کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ گردش کی رفتار غیر متغیر رہے۔

مزید براں ہم نے دفعہ (۱۸۸) میں یہ دیکھا ہے کہ سہ کی دبی ہوئی قیمت کے لئے جو ایک معینہ حد سے تجاوز نہیں کرتی دو کرہ نا انش ممکن ہیں۔ فرض کرو کہ آزاد سطح (ب ج) ان میں سے ایک شکل اختیار کرتی ہے۔ سیالی کمیت کے اندر ایک ہم مرکز کرہ ناگ ہک کھینچو جو درے کرہ بنا کے متشابہ ہو۔ تب (ب ج) اور گ ہک کے درمیان سیالی کمیت گ ہک پر کسی قسم کا اثر ڈالے بغیر علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔ سطح گ ہک کے نقطہ نیر کے ذرہ پر خول کی نقطہ نیر پر سطح کے عمود وار نہیں ہے لیکن یہ عمل کمیت گ ہک کی کس اور مغرود قوت

سمت کے ساتھ ملکر نقطہ N پر اس کردار کے عمود وار ہے جو نقطہ N میں سے گزرتا ہے اور سطح AB ج کے ہم مرکز اور متشابہ ہے۔

(۲۰۵) دوسرے الفاظ میں سطح پر کے ایک ذرہ کا وزن اس مساوی دباؤ کی سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے اور کسی اندرونی ذرہ کی صورت میں اس مساوی دباؤ کی سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے جو ذرہ میں سے گزرتی ہے۔

اسی طرح اگر آزاد سطح AB ج کی شکل ممکن اشکال میں سے ایک ہو تو ہم یہ قیاس کر سکتے ہیں کہ مانع کا ایک ہم مرکز خول کیت کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے جس کی بیرونی سطح اسی شکل کی ہے جیسے AB ج یا دوسری ممکن شکل کی سطح ہے۔

پہلی صورت میں AB ج مساوی دباؤ کی سطح نہیں ہوگی۔ کیونکہ مساوی دباؤ کی نئی سطحیں بیرونی سطح کے متشابہ اور متشابہ واقع ہوں گی۔

۱۹۳۷ — اگر سیال کی کچھ کیت اپنے مرکز نقل میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد ایک ایسی زاویہ رفتار سے گھمادی جائے کہ سمت  $\frac{H}{2}$  کی تیسرے دفعہ (۱۸۸) میں حاصل شدہ حد سے متجاوز کر جائے تو اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ سیال کردار کی شکل میں متوازن نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ قیاس کیا جاسکتا ہے کہ کیت اطراف میں بلجناؤ محور کے پھیل جائیگی اور زیادہ چپٹی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ اس کی زاویہ رفتار اس قدر گھٹ جائے کہ کردار نما شکل کا امکان ہو جائے۔

اگر کیت سیال کال پر مشتمل ہو تو اس کی شکل توازن کے کردار نما شکل میں سے بہتر از کردار کی مگر اگرچہ کہ نامعلوم سیالوں کی صورت میں ہوتا ہے، ذرات کے انتہائی بڑاؤ سے رگڑ پیدا ہو تو بہتر از ات بتدریج گھٹتے جائیں گے اور بالآخر توازن کا ایک محل روزنا ہوگا۔ اب یہ اصول استعمال کر کے کہ کل نظام کا زاویہ معیار الحریکت بلحاظ محور کے مستقل رہیگا ہم انتہائی زاویہ رفتار اور اختیار کردار انتہائی شکل معلوم کر سکتے ہیں۔

عام سوال پر بحث کرنے کے لئے فرض کرو کہ سیال کی کیت کو کسی طرح حرکت دیدی گئی ہے اور پھر اس کو اپنی حالت پر چھوڑ دیا گیا ہے تو کیت کا مرکز یا توازن ہو گا یا یکساں

رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کریگا پس اس حرکت نصف غور کرنا ہوگا جو کمیت کے مرکز کے لحاظ سے ہے۔

کمیت کے مرکز میں سے ایک ایسا مستوی کھینچو جس کی سمت میں زاویہ معیار حرکت اعظم ہے۔ تب یہ مستوی جبکہ معیاری مستوی کہا جاسکتا ہے ثابت رہے گا خواہ حرکت ابعد میں سیال کے ذرات ایک دوسرے پر کسی طرح کا عمل کریں اور جب ذرات کی اضافی حرکت ان کی باہمی رگڑ سے فنا ہو جائیگی تو اضافی توازن کی حالت میں اس مستوی پر کاغذ وار محور، سال کی کمیت کا گردشیں کا محور ہوگا۔ فرض کرو کہ نظام کا دیا ہوا زاویہ معیار حرکت  $h$  ہے اور بالآخر اسکی زاویہ رفتار  $s$  ہے۔

(۲۰۶)

توازن کے کردہ فنا کے محوروں کو ج اور ج + ۱ لہ سے اور کمیت کو ک سے تعبیر کریں تو زاویہ معیار حرکت کے لئے جملہ  $\frac{1}{2}k$  ج + ۱ لہ سے حاصل ہوگا۔

$$\therefore \frac{1}{2}k \text{ ج } + ۱ \text{ لہ } = s = h$$

$$\frac{1}{2}k \text{ ج } + ۱ \text{ لہ } = k$$

ان دو مساواتوں اور مساوات

$$\frac{s}{\frac{1}{2}k \text{ ج } + ۱ \text{ لہ}} = \frac{s}{k} \text{ مستلزم } ۳ = ۲ \text{ دفعہ (۱۸۸)}$$

سے ج،  $s$  اور لہ کی قیمتیں دریافت کی جاسکتی ہیں۔ پہلی دو مساواتوں سے

$$\frac{s}{\frac{1}{2}k \text{ ج } + ۱ \text{ لہ}} = \frac{s}{k} \text{ مستلزم } ۳ = ۲ \text{ دفعہ (۱۸۸)}$$

$$\frac{s}{\frac{1}{2}k \text{ ج } + ۱ \text{ لہ}} = \frac{s}{k} \text{ مستلزم } ۳ = ۲ \text{ دفعہ (۱۸۸)}$$

جس سے لہ کی قیمتیں ہو جاتی ہے۔

اس مساوات کی ہریشہ ایک اصل وجود کہتی ہے کیونکہ داہنی طرف کا جملہ





$$ا = \frac{سک \int \frac{۲}{ج} \cdot \frac{۲}{ج} فرع}{(۱ + ل ۲ ۲ ۲) ه}$$

$$ب = \frac{سک \int \frac{۲}{ج} \cdot \frac{۲}{ج} فرع}{(۱ + ل ۲ ۲ ۲) ه}$$

$$ج = \frac{سک \int \frac{۲}{ج} \cdot \frac{۲}{ج} فرع}{ه}$$

جن میں ہر جملہ

$$م (۱ + ل ۲ ۲ ۲) (۱ + ل ۲ ۲ ۲)$$

کو یقین کرتا ہے۔

آزاد سطح کی تفرقی مساوات ہے

$$(ا - ل - س ۲ ۲ ۲) فرلا + (ب - ل - س ۲ ۲ ۲) فرما + ج ی فری = ۰$$

اور اسلئے اگر آزاد سطح ناقص نما (۱) ہو تو

$$(ا - ل - س ۲ ۲ ۲) (۱ + ل ۲ ۲ ۲) = (ب - ل - س ۲ ۲ ۲) (۱ + ل ۲ ۲ ۲) = ج ..... (۲)$$

سہ کو ساقط کرنے سے

$$(۱ + ل ۲ ۲ ۲) (ا - ل - س ۲ ۲ ۲) = (ب - ل - س ۲ ۲ ۲) (ا - ل - س ۲ ۲ ۲)$$

اور 'ا'، 'ب'، 'ج' کی قیمتیں اس میں مندرج کرنے سے یہ

$$(۱ + ل ۲ ۲ ۲) (ا - ل - س ۲ ۲ ۲) \int \frac{۲}{ج} فرع = (ا - ل - س ۲ ۲ ۲) \int \frac{۲}{ج} فرع$$

Mécanique Céleste, Tome, II. ;

Cours de Mécanique

Statics, Vol. II, p. 306.

نوٹ متعلقہ صفحہ (۱۰۰) دیکھو

ڈوہل (Duhamel) کی

یا مینچن (Minchin) کی

میں تحلیل ہو جاتا ہے۔  
حل لہ = لہ کو جس سے چٹا کرہ نما حاصل ہوتا ہے مستور کر کے اقسام کو  
واہنی طرف منتقل کرنے سے

$$\frac{۲۶(۱-۱) - (۱-۱)۲۶}{۳} = \dots \dots \dots (۳)$$

اس مساوات سے لہ کی تعین ہوتی ہے جبکہ لہ معلوم ہو۔  
لہ کو مثبت قیمت دینے سے مساوات کی واہنی طرف کا جملہ مثبت  
ہوگا اگر لہ = ۰ اور منفی اگر لہ = ∞ ، پس لہ کی ایک قیمت مثبت ہوگی جو  
مساوات کو پورا کرے گی۔

مزید برآں مساواتوں (۲) کی رو سے

$$سہ = ۱ - \frac{ج}{۱+۲}$$

$$= \frac{۳ ک لہ (۱-۱) ۲۶ فرہ}{ج ۳ لہ (۱+۱) (۱+۱) ۲۶ فرہ} \dots \dots (۴)$$

اور اسلئے سہ ایک مثبت مقدار ہے۔

(۲۰۸) پس اس کی پوری طرح تحقیق ہوگئی کہ تین غیر مساوی محوروں والا ناقص نما  
آزاد سطح کی ممکن شکل ہے جس کے تینوں محور غیر مساوی ہیں اور سب سے چھوٹا  
محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔

مساوات (۳) سے یہ ظاہر ہے کہ لہ لازماً < ۱ اور نہ مشکل تکمل  
کی پوری وسعت میں مثبت ہوگا اور اس لئے معدوم نہ ہو سکے گا۔ اس لئے  
لہ یا لہ لازماً < ۱

اور اس لئے ۱/ج یا ب/ج ۱/۲ سے بڑا ہونا چاہیے۔ اس لئے  
جیکو بی ناقص نما کی دونوں ایلیمینٹس چھوٹی نہیں ہو سکتیں۔

۱۹۵۔ سطح پر جاذبہ کا حاصل عمل قوتوں (ل - سہ) (ا - ب - سہ) اور جی کا حاصل ہے اور اس لئے اس عمود کے بالعکس متناسب ہے جو مرکز سے ماسی مستوی پر کھینچا جائے۔

نیز اندرونی ذرہ پر مانع کی کششوں (ل + ا + ب) اور جی کو ذہن میں رکھ کر اور لییب نیز کے مسئلہ سے استفادہ کر کے یہ بتا سکتے ہیں کہ کسی مرکزی مستوی تراش پر کا حاصل زور اس مستوی کے عمود وار اور اس کے رقبہ کے متناسب ہے۔

۱۹۶۔ مشرٹاؤ ہنٹرنے اس طرف توجہ دلائی ہے اور حسب ذیل طریقہ پر اس کی تشریح کی ہے کہ گھومنے والے ناقص نما کا اعصابی توازن برقرار نہیں رہ سکتا جبکہ گردش کا محور صدی محور پر منطبق نہ ہو۔

صدی محور کے لحاظ سے فرض کر دے گردش کے محور کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن، ہیں، کیٹ کا کوئی نقطہ (ل، ا، م، ی) ہے اور ل اس عمود کا پایہ ہے جو مرکز سے محور پر کھینچا گیا ہے۔

تب  $ول = ل + ا + م + ن$  اور اگر  $ول = ع$  تول کے محدود ہیں ل، م، ن، ع اسراع سہ ہل کو محوروں کے متوازی تحلیل کیا جائے تو اجزائے تحلیل حاصل ہوتے ہیں

سہ (ل - ل، ع) سہ (ا - م، ع) سہ (ی - ن، ع) اس لئے آزاد سطح کی تفرق مساوات ہے

{سہ (ل - ل، ع) - {لا + ل + ا + م + ن} سہ (ا - م، ع) - {ب + ل + ا + م + ن} سہ (ی - ن، ع) - {ج + ی} فری۔ پس آزاد سطح کی شکل، مساوات

سہ (لا + ا + م + ن) - سہ (ل + ل + ا + م + ن) - {لا - ب + ا - ج + ی} = مستقل سے حاصل ہوتی ہے اور یہ مساوات صدی محوروں کے لحاظ سے ایک ناقص نما کو

تبیہ نہیں کر سکتی جب تک کہ ل، م، ن میں سے دو مقداریں معدوم نہ ہو جائیں۔  
 مسٹر گرین بل نے یہ بیان کیا ہے کہ گردش کے محور کے سرے پر ائج کا ذرہ صرف  
 ائج کی کشش کے زیر عمل ساکن رہے گا کیونکہ اس نقطہ پر جملہ سہ ر معدوم ہو جائے گی۔  
 پس ذرہ ہر کی کشش سطح کے عماد کی سمت میں ہونی چاہیے جو صرف  
 محور کے سرے کی صورت میں درست ہے۔

۱۹۶ — جیکوبی کے مسئلہ کا حسب ذیل ثبوت اے۔ اسمتھ نے ۱۸۳۸ء میں

(The Cambridge Mathematical Journal) کی پہلی جلد صفحہ ۹

میں دیا ہے۔

اگر ائج کی کچھ کمیت استعاجیم کے مانند زاویائی رفتار سے محور کے گرد  
 گھومے اور اگر نقطہ (لا، ا، ی) پر کشش کے اجزاء ترکیبی لا، ما، ے  
 ہوں تو آزاد سطح کی مساوات ہوگی

$$(لا - سہ لا) فرلا + (ما - سہ ما) فرما + ے فری = ۰$$

اب اگر آزاد سطح ناقص نہ ہو تو

$$لا = (لا، ما = ب، ما، ے = ج، ی$$

جہاں (ب، ج) مختصر نہیں ہیں لا، ما، ی پر۔

پس اگر لا، ب، ج ناقص نہ اے نصف محور ہوں تو مساواتوں

$$(لا - سہ لا) فرلا + (ب - سہ ب) فرما + ج ی فری = ۰$$

$$\frac{لا}{لا} فرلا + \frac{ب}{ب} فرما + \frac{ج}{ج} فری = ۰$$

کو بشرط امکان متطابق کرتا ہے۔ اس لئے مساواتیں

$$(لا - سہ لا) = \frac{لا}{ب}، ب - سہ ب = \frac{ب}{ج}، ج - سہ ج = \frac{ج}{لا}$$

پوری ہونی چاہئیں جن سے لا اور سہ لا کو سا قفا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}^2\text{ب}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \text{ج}^2 = 0 \dots\dots (ع)$$

$$\text{ا}^2\text{ب}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \text{ج}^2 = 0 \dots\dots (ع)$$

اور اگر مانع کی کمیت ک ہو تو

$$\text{ا}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{ج}^2} \text{ب}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{ج}^2} \text{ب}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{ج}^2} \text{ب}^2$$

$$\text{ج}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{ا}^2} \text{ب}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{ا}^2} \text{ب}^2$$

تب مساوات (ع) ہو جاتی ہے

$$0 = \left\{ \frac{\text{ج}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \text{ج}^2} \right\} \text{فرع} = 0$$

اگر ا، ب سے مختلف ہو تو محوروں کے درمیان جو ربط ہے اُس سے مساوات

(۲۱۰)

$$\text{ج}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{ا}^2} \text{ب}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{ا}^2} \text{ب}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{ا}^2} \text{ب}^2$$

پوری ہوئی چاہیئے۔

اگر ا اور ب معلوم ہوں تو اس مساوات سے ج کا تعین ہو جاتا ہے

اور چونکہ داہنی طرف کا جملہ منفی ہے جبکہ ج = 0 اور مثبت ہے جبکہ ج = ∞

اس لئے ج کی ایک قیمت حقیقی ہونی چاہیئے جو مساوات بالا کو پورا کرے۔

چونکہ  $\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} > 1$  مثبت ہے اور چونکہ

$$\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ج}^2} - \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ج}^2}$$

مثبت ہے اگر ع کافی بڑا ہو اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب ع چھوٹا ہو تو یہ آخری

جملہ منفی ہونا چاہیئے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

اور اس لئے مقادیر  $a$  اور  $b$  میں سے جو مقدار چھوٹی ہے اس سے  $c$  چھوٹا ہے۔

زاویہ رفتار معلوم کرنے کے لئے ہم جانتے ہیں کہ

$$s^2 (a^2 - b^2) = (a^2 - b^2) s^2$$

$$= \frac{6}{(a^2 - b^2)} \times \frac{6}{(a^2 - b^2)}$$

اور اس لئے اگر  $a$   $b$  سے مختلف ہے تو

$$s^2 = \frac{6}{(a^2 - b^2)} \times \frac{6}{(a^2 - b^2)} \dots (ج)$$

اور چونکہ یہ جملہ ایک مثبت مقدار ہے اس لئے  $s$  کی ایک ممکن قیمت حاصل ہوتی ہے اور یہ ثابت ہو گیا کہ ناقص نما، آزاد سطح کی ایک ممکن شکل ہے جب کہ اس ناقص نما کے تینوں محور غیر مساوی ہوں اور مانع سب سے چھوٹے محور کے گرو گھوم رہا ہو۔

۱۹۸۔  $c$  کا سب سے چھوٹا محور ہونا اس طرح بھی ظاہر ہے

$$s^2 = \frac{6}{(a^2 - c^2)}$$

$$= \frac{6}{(a^2 - c^2)} \times \frac{6}{(a^2 - c^2)}$$

$$= \frac{6}{(a^2 - c^2)} \times \frac{6}{(a^2 - c^2)}$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ  $s$  کے حقیقی ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ  $c > a$  اور  $c > b$

اسی طرح ج > ب۔

۱۹۹ — ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۱۹۴ میں (۱) ب ا ج کے لئے جو جملے  
دئے گئے ہیں وہ ان جملوں میں تحویل ہو سکتے ہیں جو دفعہ (۱۹۴) میں مندرج  
ہیں اگر واک کی بجائے ج (۱ + ۱) ، ب ا کی بجائے ج (۱ + ۱) اور ج (۱ + ۱) کی بجائے ج (۱ + ۱) لکھا جائے اس طرح دفعہ (۱۹۴) کی مساواتیں (ب) (ج) (د) ہی ہیں جو دفعہ (۱۹۴) کی مساواتیں (۳) اور (۴) ہیں۔ اگر سیال کی کمیت  
ک دی جائے تو ایک اور مساوات  $\frac{1}{2} \pi \rho \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{r}^2 dV$  ب ج تک حاصل ہوتی  
ہے۔ اس مساوات اور دفعہ (۱۹۴) کی مساواتوں (ب) (ج) سے واک ب ا ج  
کا تعین ک، د اور سہ کی رقوم میں ہو سکتا ہے۔

ان مساواتوں کو سی۔ او۔ ٹیسرینڈ (C. O. Mayer) نے دریافت کیا  
اور ٹیسرینڈ (Tisserand) کی کتاب *Traite de Mecanique*

*Celeste Tome II* کے باب ہفتم میں بھی ان کی پوری تشریح موجود ہے جس میں یہ  
بتایا گیا ہے کہ سہ  $\frac{1}{2} \pi \rho \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{r}^2 dV$  کی اعظم قیمت ۱۸۴۰۹ ہے جو جیکوبی ناقص نما کو  
توازن کی ایک ممکن شکل بناتی ہے اور اس خاص قیمت کے لئے ناقص نما ایک  
گردشی ناقص نما ہے جو میکلائرن کے ایک کرہ نما پر منطبق ہوتا ہے۔ مزید برآں  
یہ بھی بتایا گیا ہے کہ دفعہ (۱۹۴) کی مساوات (ج) کے بائیں جانب کا قفل اصل  
اس قیمت سے ایک یکساں قیمت اعظم اختیار کرتا ہے اور اس سے جمبونی قیمتوں  
کے لئے ایک اور صورت ایک ناقص نما حاصل ہوتا ہے۔  
میکلائرن کے کرہ نماؤں اور جیکوبی کے ناقص نماؤں سے متعلق نتیجوں کا خلاصہ اس طرح  
کہہ سکتے ہیں :-

اگر سہ  $\frac{1}{2} \pi \rho \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{r}^2 dV < ۲۲۴۷$  و تو کوئی کرہ نما یا ناقص نما نہیں

۱۵ Crelle's Journal, Tome XXIV. (1842)

۱۶ اس تشریح کے خلاصہ کے لئے دیکھو *Traite de Mecanique Rationnelle*, Tome

III, p. 170.



اگر  $۲۲۴۷$  سے  $\frac{۲۲}{۱۸۶.۰۹}$  ثا  $<$   $۱۸۶.۰۹$  تو دوپٹے کرہ نما،  
اگر  $۱۸۶.۰۹$  سے  $\frac{۲۲}{۱۸۶.۰۹}$  ثا  $<$ ، تو دوپٹے کرہ نما اور ایک ناقص نما  
جس کے تینوں محاور غیر مساوی۔

۲۰۰۔ ہم نے دفعہ (۱۹۴) میں دیکھا ہے کہ جیکوبی کے ناقص نما کی دونوں سطحیں  
چھوٹی نہیں ہو سکتیں۔ درحقیقت ایک محور ہر صورت میں گردش کے محور کا کم از کم  $۲۷$   
گنا ہے۔ جیکوبی کے ناقص نماؤں پر تفصیلی بحث کرتے ہوئے جس میں عددی جداول اور  
اشکال شامل ہیں ڈارون یہ بتاتا ہے کہ ناقص نما جیسے لمبا ہوتا جائیگا ویسے اس کے  
گھومنے کی رفتار سست پڑتی جائے گی اور جب زاویہ زقار مسلسل گھٹتی جاتی ہے  
تو معیار حرکت کا معیار مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔ اس نے یہ بھی بتایا ہے کہ لمبے ناقص نما  
تقریباً گردش کے ناقص نما ہیں جن کے گردش کا محور گھومنے کے محور پر علی التوا قائم ہے۔  
۲۰۱۔ ناقصی اسطوانہ۔ ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ نظری طور پر متجانس  
تجاذبی بالے کی لامتناہی کثیت کی سطح کی ایک ممکنہ شکل ناقصی اسطوانہ ہے جبکہ تابع ہندسہ  
جسم کے مانند اسطوانے کے محور کے گرد گھوم رہا ہو۔  
اگر  $۱$  اور  $۲$  نیم محور ہوں تو کسی اندر آونی نقطہ (لا، ۱) پر کشش کے اجزائے

ترکیبی ہیں

$$\frac{۲۲}{۱+۲} \text{ ثا } \frac{۱}{۱+۲} \text{ اور } \frac{۲۲}{۱+۲} \text{ ثا } \frac{۱}{۱+۲}$$

(کیلوں اور ٹیٹ، دفعہ ۴۹۴) اور اسلئے آزاد سطح کی مساوات ہے

$$\left( \frac{۲۲}{۱+۲} \text{ ثا } \frac{۱}{۱+۲} - \text{سہ} \right) + \left( \frac{۲۲}{۱+۲} \text{ ثا } \frac{۱}{۱+۲} - \text{سہ} \right) = ۰$$

اس مساوات کو

لے دیکھو "On Jacobi's Figure of Equilibrium for a rotating mass of fluid."

Proc. Royal Soc. Vol. XLI. (1887) p. 319, or Scientific Papers,

Vol. III. p. 119.

$$0 = \frac{\text{لا فرلا}}{2} + \frac{\text{ما فرما}}{2}$$

کے ساتھ متماثل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ} = 2 = \text{ث} \frac{1}{2} \text{ب} / (\text{ب} + 1)$$

اس سے سہ کی تعین ہوتی ہے اگر ث، ۱، ب دے گئے ہیں۔ لیکن اگر سہ، ث دے جائیں تو چونکہ

$$\frac{1 - \text{ب}}{\text{ب} + 1} = \sqrt{\frac{\text{سہ}}{\text{ث} - 1}}$$

اس لئے ناقصی ابطوانہ توازن کی ممکن شکل نہیں ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ  
سہ > ث

۲۰۲۔ پوانکارے کا مسئلہ۔ ہم نے یہ دیکھا ہے کہ جیکوبی کا ناقص نما، اصنافی توازن کی ایک ناممکن شکل ہوتا ہے اگر

$$\text{سہ} / 2 > \text{ث} < 186.9$$

ایک چٹا کرہ نما ناممکن شکل ہوتا ہے اگر سہ / 2 > ث < ۲۲۴.۷ اور ایک ناقصی ابطوانہ ناممکن شکل اگر سہ / 2 > ث < ۵۔ پوانکارے نے ثابت کیا کہ اگر سہ / 2 > ث < ۱ تو توازن کی کوئی شکل ممکن نہیں ہے۔ کیونکہ توازن کی ایک ضروری شرط یہ ہے کہ آزاد سطح کے ہر نقطہ پر کشش اور مرکز گریز قوت کے حاصل کی سمت اندرونی جانب ہو ورنہ ایک حصہ جدا ہو جائے گا فرض کرو کہ تجاذبی قوتوں کا قوتہ نہ ہے اور محور سے فاصلہ ر ہے اور فرض کرو کہ

$$e = f + \frac{1}{2} s^2$$

(۲۱۳) بیرونی جانب حاصل عادی قوت  $\frac{J}{J}$  ہے اور توازن کے لئے آزاد سطح کے ہر نقطہ پر  $\frac{J}{J}$  منفی ہونا چاہیئے مگر ان کے مسئلہ سے

$$\frac{J}{J} = \text{فرس} = \text{فرلا فرما فری}$$

جہاں پہلا مکمل سطح پر اور دوسرا سیال کے کل حجم کے اندر لیا گیا ہے۔ اور

$$f^2 = \text{لف}^2 + 2s^2 = -2\pi + 2s^2$$

$$\text{اس لئے } \frac{J}{J} = \text{فرس} = 2(s^2 - 2\pi) \times \text{جم}$$

اور اگر  $s^2 < 2\pi$  تو داہنی جانب کا جملہ مثبت ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ سطح کے چند نقطوں پر حاصل قوت کی سمت بیرونی جانب ہے اور اس لئے توازن ناممکن ہے۔  
۲۰۳ — توازن کی اور شکلیں۔ ان اشکال کے علاوہ جن پر ہم نے غور کیا ہے حلقہ (Annulus) پر سب سے پہلے لاپلاس نے غور کیا جس کا تعلق زحل کے جہلوں سے ہے اور اس وقت سے اس مصنوع پر بہت سی تحقیقات ہو چکی ہے۔

کیلون اور ٹیٹ کی (Natural Philosophy) طبع و دوم کے دفعہ ۷۷ میں نتیجوں کی ایک تعداد جو مذکورہ بالا اشکال کی قائمیت سے متعلق ہیں بغیر ثبوت

$$f^2 = \nabla^2 u$$

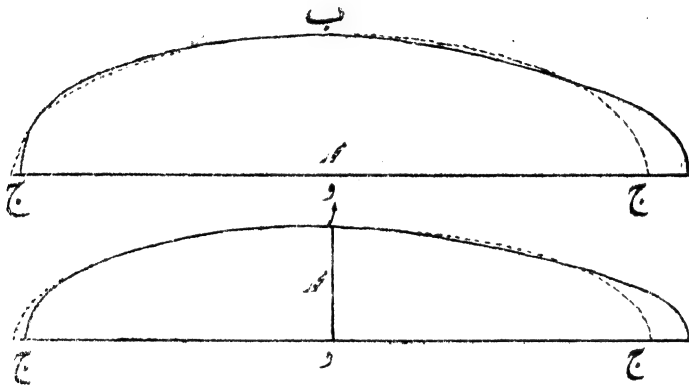
لے (Mecanique Celeste, Tome II. p. 155) نیز (Tisserand) کی

(Mecanique Celeste) جلد دوم کے ابواب نہم، دہم، ووازدہم دیکھو جن میں لاپلاس

کیرک میکول، اور (Mme Kowalewsk) کی تحقیقاتوں پر بحث کی گئی ہے۔

کے درج کی گئی تھی۔ ان نتیجوں کو قائم کرنے کی کوشش میں پوانکارے نے ایک مشہور و مقبول مقالہ لکھا جو ۱۸۸۵ء میں (Stockholm) میں شائع ہوا۔ اس مقالہ میں توازن کی شکل کے مسئلہ پر زیادہ عام طریقہ سے بحث کی گئی ہے۔ اس میں بتایا گیا ہے کہ توازن کی ممکن اشکال خطی سلسلہ بناتی ہیں یعنی ایسا سلسلہ جو ایک تنہا مبدل پر منحصر ہوتا ہے، مثلاً زاویہ زقار پر اور ایسا کہ مبدل کی ہر قیمت کے جواب میں ایک اور صرف ایک شکل یا اشکال کی ایک محدود تعداد حاصل ہوتی ہے اور یہ کہ اشکال ایک مسلسل طریقہ سے بدلتی ہیں جب کہ مبدل بدلا جاتا ہے۔ اس طرح میکلا رن کے کہہ مٹا ایک خطی سلسلہ بناتے ہیں اور جیکوبی کے ناقص نماد ویرا۔ یہ ہو سکتا ہے کہ ایک ہی شکل دو مختلف سلسلوں سے تعلق رکھے۔ اس طرح کی شکل دو شاخگی کی ایک صورت ہے۔ مثلاً کرہ نماؤں کے سلسلہ کا ایک خاص رکن ایسا ہے جو جیکوبی کے ناقص نماد کے سلسلہ سے تعلق رکھتا ہے۔ پوانکارے نے اس مقالہ میں توازن کی اشکال کی قاننیت کے مسئلہ پر بھی بحث کی ہے اور یہ بتایا ہے کہ اگر اشکال کا ایک سلسلہ دو شاخگی کی شکل کی حد تک قائم ہو تو اس نقطہ کے بعد اشکال غیر قائم ہو جاتی ہیں۔ تمام اشکال اب دوسرے سلسلہ سے متعلق ہو جاتی ہیں جو دو شاخگی کی شکل میں مثال ہوتا ہے۔ اس طرح میکلا رن کا کہہ مٹا اس وقت تک قائم ہوتا ہے جب تک کہ اس کا خروج مرکز ۸۱۲۷ سے کم ہو جو دو شاخگی کا نقطہ ہے اور اس نقطہ سے جیکوبی کے ناقص نماد قائم ہو جاتے ہیں۔ جیکوبی کے ناقص نمادوں کے سلسلہ میں دو شاخگی کے نقطہ (Lame) کے تقاطعوں کی مدد سے معلوم کرنے کی کوشش میں پوانکارے نے دریافت کیا کہ توازن کی اشکال کے سلسلوں کی تعداد لامتناہی ہے تمام اشکال بلحاظ ایک مستوی کے جو گردش کے محور پر عمود وار ہوتا ہے متشکل ہوتی ہیں۔ تمام اشکال کم از کم ایک متشکل کا مستوی رکھتی ہیں جو محور میں سے گزرتا ہے اور ان میں سے بعض گردش کی اشکال ہیں۔ ان اشکال میں صرف ایک قائم ہوتی ہے اور اس صورت میں متشکل کے صرف دو مستوی ہوتے ہیں۔ یہ وہ شکل ہے جو جیکوبی کے ناقص نمادوں کے سلسلہ میں پہلی دو شاخگی سے پیدا ہوتی ہے اور ان کو توازن کی ناسپاتی متشکل کہا گیا ہے

کیونکہ پوائنڈ کے مقالہ میں جو شکل کھینچی گئی ہے وہ ناسپاتی کے مشابہ ہے۔ مزید تحقیقات سے معلوم ہوا کہ شکل ناسپاتی سے اتنی مشابہت نہیں رکھتی جتنی کہ پہلے فرض کی گئی تھی۔ ڈارون اُنے اس پر دو مقالوں میں بحث کی ہے اور دوسرے تقریباً اس کی شکل کا تعین کیا ہے۔ درشاغلی کے نقطہ پر جیکوبی ناقص نما کے محوروں میں نسبت ناسپاتی نامشکل جیکوبی کے اس ناقص نما سے ذرا سا فرق رکھتی ہے۔



جو اپنے سب سے لمبے محور کے ایک سرے پر ابھرا ہوا اور دوسرے پر گنڈ ہوتا ہے۔

For. cit. p. 347, also *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 161.  
 "On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid," *Phil. Trans.* Vol. 198 A (1901), p. 301, or *scientific papers*, Vol. III p. 288, and "The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid," *Phil. Trans.* Vol. 200 A (1902), p. 251, or *Scientific Papers*, Vol. III. p. 317.

ان اشکال کی تائیت پر ایک سلیس اور دلچسپ مضمون، *The Genesis of Double Stars*.

میں بہت آسان بحث کی گئی ہے۔ یہ مضمون، *Darwin and Modern Science*.  
 باب بست و ہشتم میں اسی مضمون کا لکھا ہوا ہے۔

اشکال بالا میں جن کو بالا اجازت متذکرہ صدر ڈاروں کے دوسرے مقالہ سے لیا گیا ہے نقطہ وار خط جیکو بی ناقص نما کو تعمیر کرتا ہے اور دوسرا سختی ناسپاتی نما شکل کو باپروالی شکل استوائی تراش اور پچلی نصف النہاری تراش سے تشاکل کے مستوی میں۔

۲۰۴۔ چھوٹی ایللیجیبتوں کے بٹھوس متجانس ناقص نما کی کشش کے لئے حسب ذیل جملے کھونٹے والے مانع کی کمیتوں کی اختیار کردہ اشکال کی بحث میں اگر مفید ثابت ہوتے ہیں یعنی اگر (ب، ج) نیم محور ہوں ایسے کہ  $b = (1 - \frac{1}{2} \text{ صہ})$  اور  $c = (1 - \frac{1}{2} \text{ شہ})$  تو کسی اندرونی نقطہ (لا، ما، می) پر کشش کے اجزائے ترکیبی ہیں

(ب، ث، لا، ب، ث، ج، ث، می)

جہاں

$$A = \frac{2\pi}{3} (1 - \frac{1}{2} \text{ صہ} - \frac{1}{2} \text{ شہ})$$

$$B = \frac{2\pi}{3} (1 + \frac{1}{2} \text{ صہ} - \frac{1}{2} \text{ شہ})$$

$$C = \frac{2\pi}{3} (1 - \frac{1}{2} \text{ صہ} + \frac{1}{2} \text{ شہ})$$

ان جملوں کو متشاکل صورت میں اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$A = \frac{2\pi}{3} (1 - \frac{1}{2} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}) \quad \text{وغیرہ}$$

$$B = \frac{2\pi}{3} (1 - \frac{1}{2} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}) \quad \text{یا اس طرح} \quad \text{وغیرہ}$$

$$C = \frac{2\pi}{3} (1 - \frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}) \quad \text{جہاں}$$

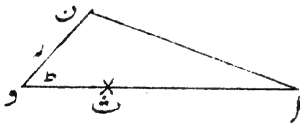
۲۰۵۔ مثال۔ متجانس مانع کی کمیت ک اور ک کمیت کا ایک دُور کہا ہوا

کرہ اعنانی توازن میں اپنے مرکز ثقل کے گرد چھوٹی یکساں زاویائی رفتار سے گھوم رہے ہیں۔ ثابت کر دو کہ مانع کی آزاد سطح صغیر ایللیجیبتوں کا ناقص نما ہے جس کا سب سے

لبا محور ک کی طرف ہے اور سب سے چھوٹا محور حرکت کے مستوی پر علی التوا اعم ہے۔ اور اجسام کے مراکز ثقل کو لانے والے خط میں سے گزرنے والی صدری حراشوں کی پلہ جیوں کی نسبت ہمک + ک : ۳ ک ہے۔ (Math. Tripos. 1888)

اگر اجسام کے درمیان فاصلت ہو تو کیت ک کے مرکز ثقل و کا اسراع  $\frac{۳}{۲}ک$  ہے اور و کو ساکن کر دیا جاسکتا ہے اگر مانع کی کیت کے ہر عنصر پر یہ اسراع متقابل سمت میں لگا دیا جائے۔

اگر کیت ک کا مرکز ثقل ہو اور مانع کی کیت میں کوئی نقطہ ن ہو تو ن پر عمل کرنے والی قوتیں ہیں  $\frac{۳}{۲}ک$  کی سمت میں،  $\frac{۱}{۲}ک$  کے متوازی، وہ قوت جو مانع کی برخورد کشش سے پیدا ہوتی ہے، اور مرکز گریز قوت۔ اب ن کی سمت میں عمل کرنے والی قوت  $\frac{۳}{۲}ک$  معادل ہے



ن کی سمت میں عمل کرنے والی قوت  $\frac{۳}{۲}ک \times ن$  کے اور و کے متوازی عمل کرنے والی قوت  $\frac{۳}{۲}ک \times و$  کے۔

اول الذکر

$$\frac{۳}{۲}ک = \frac{مک ر}{(ن + و - ر) جم طه} = \frac{۱}{۲}ک کے پہلے رتبہ تک۔$$

کی تیسری جلد

(Mecanique Celeste)

لے اس قسم کے مسئلوں پر پلا بلاس نے میں بحث کی ہے۔

$$\begin{aligned} & \text{ثانی الذکر} \frac{\text{مہک}}{۱۰} \text{ کے ساتھ مل کر} \\ & = \frac{\text{مہک ف}}{(۱۰ + ۲ - ۲۰ \text{ رجم طہ})} - \frac{\text{مہک}}{۲۰} \\ & = \frac{\text{مہک ف}}{۲۰} \left\{ ۱ + \frac{۲۰}{۱۰} \text{ رجم طہ} - ۱ \right\} \\ & = \frac{۳ \text{ مہک رجم طہ}}{۲۰} \end{aligned}$$

و ا کے متوازی -  
اگر ہم ناقص نمائی شکل مان لیں اور و ا کو محور لا اور گردش کے محور کو محوری قرار دیں تو

$$\begin{aligned} \text{فج} &= \text{سہ} (لا فرلا + افرا) - (اٹ لا فرلا - بٹ افرا - ج ٹ ی فری) \\ &= \frac{\text{مہک ر}}{۲۰} \text{ فر} + \frac{۳ \text{ مہک لا}}{۳۰} \text{ فرلا} \end{aligned}$$

اور آزاد سطح کی شکل ہونی چاہیئے

$$\begin{aligned} & لا (سہ - اٹ) + \frac{۳ \text{ مہک}}{۲۰} - \frac{\text{مہک}}{۳۰} + ما (سہ - بٹ) - \frac{\text{مہک}}{۳۰} \\ & - ی (جٹ + \frac{\text{مہک}}{۲۰}) = \text{مستقل} \\ & \therefore لا (اٹ - \frac{۲ \text{ مہک}}{۲۰} - سہ) = ب (بٹ + \frac{\text{مہک}}{۳۰} - سہ) \\ & = ج (جٹ + \frac{\text{مہک}}{۳۰}) \end{aligned}$$

اب چونکہ کیتیں اپنے مرکز نقل ٹ کے گرد زائوی زقارہ سے گھوم رہی ہیں

$$\therefore \text{سہ} \times \text{وٹ} = \frac{\text{مہک}}{۲۰}$$



لیکن

(ک+ک) وٹ = ک ف

$$\therefore \frac{2}{\text{سطح}} = (k+k)$$

$$\therefore \{ 1 - \text{ب} \cdot \text{ب} = \frac{\text{س}}{\text{ت}} \} \cdot \left( \frac{\text{ا} + \text{ک}}{\text{ک} + \text{ر}} \right) - \left( \frac{\text{ا} - \text{ک}}{\text{ک} + \text{ر}} \right) \cdot \text{ب} \cdot \text{ا} = \text{ک} \cdot \text{ر}$$

$$\frac{2}{k+1} = \frac{2}{k} - \frac{1}{k+1}$$

کیونکہ سہ/شا اور ا۔ ب چھوٹے ہیں۔

اسی طرح  $\{ \frac{1}{k} - (j - \frac{1}{k}) \} = \frac{1}{k}$

$$\frac{\text{سہ} + \text{ک}}{\text{ک} + \text{ک}} = \frac{\text{سہ}}{\text{ک}}$$

لیکن دفعہ گزشتہ سے

$$(۲۱۵) \quad \left\{ \frac{b-k}{k} \cdot \frac{y}{2} + \frac{k-1}{k} \cdot \frac{y}{2} - (b-k) \right\} \pi \frac{x}{r} = \text{باب } ۱$$

$$(b-1 - \frac{b+b+1}{5}) \frac{1}{6} - (b+1) \} (b-1) \pi \frac{1}{4} =$$

اور صغیر فرق ۱۔ ب کے پہلے رتبہ تک صحیح نتیجہ حاصل کرنے کے لئے ہم آخری جزو ضربی میں کہ = ب = ۱ رکھ سکتے ہیں۔ اس طرح

۱۲- ب<sup>۲</sup> ب =  $\frac{14}{15}$  (ب-۱)

اسی طرح  $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} (1 - \frac{1}{10})$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{سک}}{\text{سک} + \text{ک}} = \frac{\text{ا} - \text{ج} \cdot \text{ب}}{\text{ا} - \text{ج} \cdot \text{ج}} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} - \text{ج}}$$

## امثلہ

- ۱۔ نصف قطر کا ایک چلا کر دی خول ٹ کثافت کے عجاذبی مانع سے عین بھرا ہوا نہیں ہے۔ اگر مانع اضافی توازن میں ایک قطر کے گرد زادی رفتار سے گھوم رہا ہو تو ثابت کرو کہ گردش کے محور کے علی القوائم خول کا جو بڑا دائرہ ہے اس کے کسی نقطہ پر سطح دائرہ کی علی القوائم سمت میں تناؤ شدت  $\frac{2}{3}r$  کے مساوی ہے۔
- ۲۔ ایک استوار کر دی خول عجاذبی سیال سے عین بھر دیا گیا ہے۔ یہ ایک مرکزہ ہے جو ایک دوسرے ملے سیال کے خول سے گھرا ہوا ہے۔ کل نظام کو ایک قطر کے گرد گھمایا گیا۔ ثابت کرو کہ ایک چپٹا کرہ مناسب فاصل کی ممکن شکل ہے۔
- ۳۔ ایک استوار کر دی خول میں دو مائعات ہیں جو آمیز نہیں ہوتے اور کل نظام استوار جسم کی مانند خول کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد گھومتا ہے۔ اس سے بڑی زاوی زقار معلوم کرو جس کے لئے مشترک سطح کر دی ہو جائے اور خول کو مس نہ کرے اور ثابت کرو کہ جب زاوی زقار اس قیمت سے متجاوز نہیں ہوتی تو کرہ نما کا خروج مرکز خول کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتا۔
- ۴۔ ٹ کثافت کے مانع کی کچھ کثیت ٹ کثافت کے مانع کی کچھ کثیت سے گھٹی ہوئی ہے اور کل کثیت پوری طرح ایک غلاف میں بھر جاتی ہے جسکی شکل صغیر بیلیجیت صہ کا ایک چپٹا کرہ نما ہے۔ اگر غلاف اپنے محور کے گرد غیر زادی رفتار سے گھومے تو ثابت کرو کہ مشترک سطح کی ممکن شکل صہ بیلیجیت کا ایک چپٹا کرہ نما ہے جہاں صہ

$$15 \frac{1}{2} \times 16 = 247 + 17 (\text{صہ} - \text{صہ}) \text{ ٹ}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

- ۵۔ ایک غلاف صغیر بیلیجیت صہ کے ایک لمبوترے کرہ نما کی شکل میں ہے۔ اس کو ٹ + ٹ کثافت کے ایک سیالی مرکزہ اور اس کے گرد ٹ کثافت کے سیال سے بھر دیا گیا ہے اگر یہ اپنے محور کے گرد زادی رفتار  $(\frac{1}{2} \times 16 \text{ ٹ صہ})$

سے گھومے تو ثابت کرو کہ مشترک سطح کی ممکن شکل ایک کرہ ہے۔  
۶ — ث کثافت کے متجانبش مانے کی کچھ کیفیت ایک غلاف کو بھر دیتی ہے  
جسکی شکل ناقص نما لا/۲ + ما/ب + می/ج = ۱ ہے، یہ غلاف استوار جسم کی  
مانند خط لا/ل = ما/م = می/ن کے گرد یکساں زاویہ رقتار سے سے گھومتا  
ہے۔ اگر مرکز پر کا دباؤ سطح پر کے کسی نقطہ پر کے دباؤ سے بقدر ۱/۲ ل ث کے  
زیادہ ہو اور یہ اضافہ بڑے سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$0 = \frac{2\text{ن}}{\frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{ج} - \frac{1}{\text{ل}}}} + \frac{2\text{م}}{\frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب} - \frac{1}{\text{ل}}}} + \frac{2\text{ل}}{\frac{1}{\text{ل}} - \frac{1}{\text{ل} - \frac{1}{\text{ل}}}}$$

جہاں لا، ب، ج، م، کسی اندرونی نقطہ پر کی کشش کے اجزاء ترکیبی ہیں۔  
۷ — ایک یکساں کرہ جو معمولی تجاذبی مادے سے بنایا گیا ہے اور جسکا نصف  
قطر ۱ ہے چھوٹی یکساں زاویہ رقتار سے دور کے ایک قوت کے مرکز کے گرد ایک  
دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ مرکزی قوت فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔  
اگر کرہ کو پوری طرح پانی سے ڈھانپ دیا جائے اور پانی کی برخود کشش نظر انداز  
کر دی جائے تو ثابت کرو کہ پانی کا حجم

$$10 \text{ سے } 1/3 \text{ ج}$$

سے بڑا ہونا چاہیئے جہاں ج کرہ کی سطح پر جاذبہ ارض کی قیمت ہے۔  
۸ — دو تجاذبی امات آمیز نہیں ہوتے اور جن کی کثافتیں ث، ث (ث) (ث)  
ہیں ایک استوار کرومی لفاظ میں بند ہیں اور کل نظام اضافی توازن میں کرے  
کے ایک قطر کے گرد صغیر یکساں زاویہ رقتار سے سے گھومتا ہے ثابت کرو کہ  
ان دو مائوں کی مشترک سطح کی ممکن شکل ایک چپٹا کرہ ہے جس کی ایللیجیٹ ۵/۱۱ سے  
۱۲ (ث + ۲/۲) ہے۔

۹ — اوسط نصف قطر کا ایک لانتنا ہی متجانس اسطوانہ نہ کثافت کے متجانس مائع کی کثیت سے گھرا ہوا ہے۔ اسطوانہ کی کثافت  $\rho$  اور اس کی صغیر ہیلیجیت  $\mu$  سے کل نظام اصنافی توازن میں خود اپنی کشش کے زیر عمل محور کے گرد یکساں زاویائی رفتار  $\omega$  سے گھومتا ہے۔ اگر آزاد سطح کا اوسط نصف قطر ہو تو ثابت کرو کہ آزاد سطح کی ممکن شکل ایک ناقصی اسطوانہ ہے جسکی صغیر ہیلیجیت ہے

$$\rho \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right)$$

۱۰ — ث کثافت کے جاذب سیال کی دی ہوئی کثیت اصنافی توازن میں زاویائی رفتار  $\omega$  کے ساتھ اس طرح گھوم سکتی ہے کہ اس کی آزاد سطح ناقص نما کی شکل میں ہے جس کے تینوں محاور غیر مساوی ہیں اور سب سے بڑا نیم محور  $a$  ہے۔ اب اس شکل کا ایک استوار بنایا گیا ہے اور اس کے اندرونی سیال کو غلط کے ساتھ اصنافی توازن کی حالت میں سب سے چھوٹے محور کے گرد زاویائی رفتار  $\omega$  سے گھمایا گیا ہے ثابت کرو کہ سطح کے کسی نقطہ پر کا دباؤ ہے

$$\frac{1}{2} \rho \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right)$$

بوجب اس کے کہ  $\mu$   $\rho$  سے بڑا یا چھوٹا ہو۔

۱۱ — اوسط کثافت  $\rho$  کا ایک ٹھوس کرہ یکساں کثافت  $\rho$  کے مائع کی ایک پتلی چادر سے لپیٹ دیا گیا ہے کل نظام کرہ کے مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد صغیر یکساں زاویائی رفتار  $\omega$  سے گھومتا ہے۔ ٹھوس کرہ معکوس مربع کے قانون کی بوجب اس طرح جذب کرتا ہے گویا کہ اس کا مادہ محور کے ایک نقطہ پر بچھڑا ہے جسکا مرکز سے فاصلہ  $b$  چھوٹا ہے۔ مائع بھی معکوس مربع کے قانون کے بموجب جذب کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی بیرونی سطح تقریباً ایک کرہ نما ہے جس کی ہیلیجیت  $\mu = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right)$  ہے اور

جسکا مرکز کرہ کے مرکز سے  $\frac{1}{2} \rho \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\rho} \right)$  فاصلہ پر واقع ہے۔

۱۲۔ نصف قطر اور ث کثافت کا ایک ٹھوس تجاذبی کرہ مانع سے گھرا ہوا ہے جسکی کثافت  $\frac{1}{2}$  ہے اور جبکا حجم  $\frac{1}{2}$  (ب ۳) - (۳) ہے۔ کل نظام صغیر زاد کی رفتار سے گھمایا جاتا ہے۔ ثابت کر دو کہ مانع کی آزاد سطح کی شکل ہر مشق

$$r = b(1 - \frac{2}{3} \text{ صد } c)$$

سے حاصل ہوتی ہے، جہاں کرہ نمائی صغیر  $\frac{1}{2}$  البجیت صد

۱۵۔ باب ۲

$$\{ \frac{1}{2} (5 - \text{ث}) \} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ث } b$$

اور  $\frac{1}{2}$  دوسرے رتبہ کا لیجنڈر کا سر ہے۔

۱۳۔ ث کثافت اور  $\frac{1}{2}$  (ک ۳) - (۱) حجم کے متجانس مانع کی کیت جو

ث کثافت اور  $\frac{1}{2}$  نصف قطر کے ایک ثابت ٹھوس کرہ کی مرکزہ کو گھیرے ہوئے ہے قطبی محور کے گرد صغیر زاد کی رفتار سے گئے ساتھ ٹھوس کے اندر اپنی خود کشش، مرکزہ کی کشش اور ایک ذرہ کی کشش کے زیر عمل گھوم رہی ہے۔ ذرہ کی صغیر کیت ک ہے اور وہ قطبی محور پر کرہ کے مرکزہ سے  $\frac{1}{2}$  ج فاصلہ پر واقع ہے۔ آزاد سطح کی شکل کی تعیین کر دو کہ کرہ کا کوئی حصہ مانع سے خالی نہ ہو اور ثابت کر دو کہ ک کے نزدیک ترین نقطہ کے نصف حصہ پر مانع کا حجم مانع کے اس حجم سے بقدر

(۲۱۹)

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ ث } (1 - \frac{1}{2} \text{ ث})}{\frac{1}{2} \text{ ث } + \frac{1}{2} \text{ ث } (1 - \frac{1}{2} \text{ ث})} = \frac{1}{2} \text{ ث } (1 - \frac{1}{2} \text{ ث})$$

کے بڑا ہے جو اس صورت میں ہوتا جبکہ ک نہ ہوتا۔

ایسی صورت میں بخت کر دو میکث تقریباً ث کے مساوی ہو جائے۔

۱۴۔ ایک متجانس تجاذبی سیال ایک استوار لٹافہ کو ٹپ کر کے نے میں عین نا کافی ہے۔ لٹافہ ایک چھٹے ناقص ننا کی شکل میں ہے۔ سیال اضافی توازن میں قطبی محور کے گرد توانائی بالحرکت ع کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ اگر سیال توانائی بالحرکت ع

کے ساتھ گھومے تو لحافہ صغیر و باد کی آزاد سطح ہو جاتا ہے۔ ع کی تمام قیمتوں کے لئے  
خود د و ع سے بڑی ہوں یا چھوٹی ثابت کر دو کہ لحافہ کے استوائی تراش کے عمود وار  
تناؤ فی اکائی طول ہے

$$\frac{15}{32} \quad \frac{ع}{ع} \sim \frac{ع}{ع}$$

جہاں  $\frac{ع}{ع}$  ناقص نما کی قطبی تراش کا رقبہ ہے۔  
۱۵۔ مک کیت کے تقریباً کر دی ٹھوس جسم کی سطح پر مانع کی ک کیت ہے۔  
ٹھوس جسم کی سطح کی مساوات ہے  $r = (1 + \frac{ع}{ع})$ ۔ ٹھوس اور مانع کلیہ نیوٹن کے  
بوجب جذب کرتے ہیں اور کل نظام زاویائی رفتار سے کے ساتھ موسیقی کے محور  
کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کر دو کہ خط استوائی سے غیر ڈھنپا ہوا ہوگا اگر

$$k > 9 \text{ ع/ک} / (12 - 4) - 5 \text{ ع/ک} / (10 - 6) \text{ اور قطب غیر ڈھنپے ہوئے}$$

$$\text{ہونگے اگر ک} > 9 \text{ ع/ک} / (13 - 1) + 5 \text{ ع/ک} / (15 - 3)$$

جہاں  $\frac{ع}{ع}$  نسبت ہے جو ٹھوس جسم کی کثافت کو مانع کی کثافت کے ساتھ ہے۔  
۱۶۔ یہ انکر کو زمین ایک سیال پر مشتمل ہے جو ایک ٹھوس کر دی مرکز کو گھیرے  
ہوئے ہے ثابت کر دو کہ اہلیجیت صہ جبکہ صغیر فرض کیا گیا ہے رشتہ

$$\frac{صہ}{ک} = \frac{ع}{ع} \quad \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع}$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ک وہ نسبت ہے جو استوار پر مرکز نی کوت کو دہاں کے جاذبہ  
سے ہے۔  $\frac{ع}{ع}$  کل زمین کی اوسط کثافت اور  $\frac{ع}{ع}$  سیال کی کثافت ہے۔  
ذیل کی صورتیں سنبھال کر

$$(1) \text{ پورے طور پر سیال زمین کی صورت} \quad \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع}$$

$$(2) \text{ ٹھوس مرکزہ پر بہت پایاب سمندر} \quad \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع}$$

لے علم فیض کا چار بجی صہ۔ مترجم

## متفرق مثالیں

(۲۲۰)

۱۔ یکجہاں سیال کی کچھ مقدار جس کے اجزاء ایک دوسرے کو بموجب قانون قدرت جذب کرتے ہیں ایک گزہ میں بھر جاتی ہے جس کے مرکز پر ایک مرکزی قوت

ثابت موجود ہے۔ گزہ کا نصف قطر ج اور سیال کی کیت (۲ کم - مہ) ج ہے جہاں

ثابت کہ  $d = 2$ ۔ ثابت کرو کہ دائرہ کی شرطیں پوری ہوتی ہیں اگر ت، راس کے بالعمک متناسب۔

۲۔ ایک گزہ (نصف قطر ص) پانی سے عین بھرا ہوا ہے اور اعتدالی محور کے گرد دائرہ فی زخم قرار دے کے ساتھ گھومتا ہے اس طرح کہ  $ص = ۲$  ج۔ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی جو سطح گزہ کو علی القوائم قطع کرتی ہے اس میں دباؤ  $۳$  ج  $۴$  ج ہے جہاں  $۳$  ج پانی کی کثافت ہے۔

۳۔ مانع کی کچھ کیت تین محدودوں کے مستویوں کے درمیان واقع ہے ان مستویوں میں سے ہر ایک ایسی قوت سے مانع کو جذب کرتا ہے جو فاصلے کے متناسب ہے اور کشش کی مطلق قوتیں مہ، مہ، مہ سلسلہ ہستیہ میں ہیں۔ ایک نصف ناقص نما اس طرح ثابت کرو یا لگیا ہے کہ اس کا مستوی رخ ایک مستوی پر واقع ہے اور اس کی منحنی سطح دوسرے دو مستویوں کو مس کرتی ہے اس کے محور محدودوں کے محوروں کے متوازی ہیں اور

مہ، مہ، مہ

کے بالعمک متناسب ہیں۔

اگر ناقص نما کو ڈھانپ دینے کے لئے سیال ناکافی ہو تو غیر ڈھنپا ہوا حصہ ایک دائرہ سے محدود ہوگا۔

۴۔ مانع کی کچھ کیت اپنے ذرات کے باہمی جذب کے تابع ہے اور ایک دفاعی قوت مانع کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک مستوی سے پرے ہٹانے کا اثر رکھتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس مستوی سے عمودی فاصلہ۔

ثابت کر دے تو ان کی شرطیں پوری ہونگی اگر سطح ایک خاص ہیلیجیت کا لمبو ترا کر لیا  
ہو بشرطیکہ دفاعی قوت بہت زیادہ بڑی نہ ہو۔

۵۔ ایک مثلثی رقبہ سیال میں اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع سیال کی سطح میں ہے۔ اس مثلث میں سب سے بڑے ممکن رقبہ کا قطع ناقص بنایا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ مثلث کے بقیہ حصہ کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی اس کے

۶۔ سیال برکلیہ نیوٹن کے بموجب جاذب بالذات ہے ایک طرف میں عن  
بھر جاتا ہے۔ یہ ظرف ناقص نما  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{r}$  کی شکل کا ہے۔ کسی  
نقطہ پر کا دباؤ اور طرف پر اعظم اور اقل دباؤ کے نقطے معلوم کرو۔

۷۔ انگریز دورِ بریتہ الامتلاخ رقبے کے راسوں کی انگریزیاں عہد، جہ،  
ضہ ہوں اور رقبہ مانع میں پوری طرح غرق ہو اور اس کے مرکزِ نقل کی گہرائی نصف  
ہو تو اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{1}{4} (ع + ح + ق + ج + ض) - \frac{1}{4} (ب + ج + ح + ع + ح + ج + ض + ج + ض)$$



مثلاً کے راس ب تک پہنچ جائے۔  
 اگر مثلاً کے رقبہ کو کم سے کم کر دیا جائے اس طور پر کہ پانی کی دی ہوئی گہرائی  
 کے لئے کائنات برقرار رہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{9 + 2s + s^2}{s - 3} = \text{مس ج}$$

$$\frac{9 + 2s + s^2}{s - 1} = \text{مس ا}$$

جہاں بند کی کثافت نوعی سن ہے۔  
 ۱۰۔ سیال کی کچھ کمیت اپنی خود کشش کے زیر عمل قوازن میں ہے ثابت کرو کہ  
 کسی نقطہ (۱، ۱، ۱) پر کا دباؤ اس مساوات

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} \left( \frac{1}{\text{جف لا}} \right) + \frac{\text{جف ا}}{\text{جف ا}} \left( \frac{1}{\text{جف ا}} \right) + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ی}} \left( \frac{1}{\text{جف ی}} \right) = -\frac{1}{r^2}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں لٹ نقطہ (۱، ۱، ۱) پر کی کثافت ہے۔  
 سیال کی لامتناہی کثیت (ایسی کہ د = کہ فٹ ۲ جہاں کہ مستقل ہے) ایک استوار  
 کر دی خول کو گھیرے ہوئے ہے اور خود اپنی کشش کے زیر عمل قوازن میں ہے  
 لامتناہی پر دباؤ ۳ ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۱۱۔ نمشتوں کا ایک بل، ایک مستوی استوار راستے ا ب کو انقی محل میں  
 تھا متا ہے۔ اگر ایک چھوٹا متحرک بوجھ نقطہ گ پر رکھا جائے تو پل یکساں طور پر  
 نیچے دبتا ہے۔ جب بوجھ نقطہ ج پر رکھا جاتا ہے تو سارا اپنے محل میں غیر متغیر  
 رہتا ہے، جب نقطہ د پر تو سارا ب اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے، اور جب  
 نقطہ ن پر تو راستہ کا نقطہ ق اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے۔

ثابت کرو کہ اگ × ج = بگ × گ = دگ × گ ق

اور یہ کہ نقطہ ن پر کے ایک بوجھ سے نقطہ م پر جو انحراف پیدا ہوتا ہے وہ اس انحراف  
 کے مساوی ہے جو اسی بوجھ کو نقطہ م پر رکھنے سے ن پر پیدا ہوتا ہے۔

۱۲۔ ایک پائیل میں سید پتیرا ہے اور اس کے اندر پانی ہے۔ اس کی شکل معلوم کرو اور اس کا نقشہ کھینچو جب دونوں مائعات کی سطحوں کا فرق اغراق کے تمام درجوں کے لئے وہی ہو۔

۱۳۔ کسی شکل کے ظرف میں کچھ مائع ہے اور اسکو مختلف شکل کے دوسرے ظرف میں بھرنے دیا جاتا ہے۔ اگر علی التوائم محدود کے لحاظ سے (جو ظروف پر منحصر نہیں ہیں) فقط (لا، لا، تا) پر کسی ظرف میں دباؤ نہ ہو تو  $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$  (یا  $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$ ) کی دونوں قیمتوں کے درمیان فرق اس کام سے جو مائع نے اوپر والے ظرف سے نیچے ظرف میں بہانے میں کیا ہے اس قدر فرق رکھتا ہے جو اس کام کے مساوی ہے جو نیچے ظرف میں سیال کی سطح کو اسی افقی مستوی پر لانے میں درکار ہوتا ہے جو اوپر والے ظرف میں سیال کی ابتدائی سطح تھی۔

۱۴۔ گردش میں مائعات کی شکل کے ایک ظرف میں کچھ سیال ہے جو مکانی مائعات انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ زاویہ رفتار معلوم کرو جبکہ سیال میں ڈھلکنا شروع کرے۔ اور ثابت کرو کہ اگر یہ زاویہ رفتار  $\frac{1}{2} \omega$  ہو تو ظرف میں سیال سو نصف بھرا ہوا ہونا چاہیئے۔

اگر مکانی مائعات گردش نہ ہو بلکہ  $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$  کی شکل کا ہو اور محور (ی) انتصابی ہو اور اگر سیال کی سطح جس منحنی کو ظرف کو ملتی ہے اس کے اعظم اور اقل ارتفاع  $y_1$ ،  $y_2$  ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

جہاں دونوں مکانی مائعات کے واسوں کے درمیان فاصلہ  $k$  ہے۔

۱۵۔ ایک استوائی ظرف عواص انتصابی محور کے ساتھ اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ پانی ظرف کے نصف حصہ تک بڑھ جاتا ہے۔ ظرف کی اوپر کی سطح کے مرکز سے اس کے مرکز ثقل کا اقل فاصلہ معلوم کرو جو اس شرط کے مطابق ہو کہ توازن محور کے زاویہ ہٹاؤ کے لحاظ سے قائم ہو سکے۔

(۲۲۲)

۱۶۔ بے پچک سیال، قوتوں

$$\frac{ملا}{۲} - \frac{مسا}{۲} - \frac{ری}{۲}$$

کے زیر عمل ساکن ہے جو علی الترتیب محروں کے متوازی ہیں۔ ایک ذرہ جس کی کثافت سیال کی کثافت سے کم ہے سطح

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ا}{۲} + \frac{ی}{۲} = مکی$$

میں کسی جگہ رکھ دیا گیا ہے۔ مزاحمت نظر انداز کر کے ثابت کر دو کہ ذرہ کی رفتار سطح (جسکی تقسین مقدار اُک سے ہوتی ہے) سے گزرتے وقت ایسے بدلتی ہے جیسے

ماکت - ک -

۱۷۔ ایک پمپکار کردی لغاذ توازن کی حالت میں ہے جبکہ اس میں کردہ ہوائی کے دو چند کثافت کی ہوا ہے اور اس کا نصف قطر قدرتی نصف قطر کا دو چند ہے۔ اگر بار پمپ کا ارتفاع  $\frac{۱}{۲}$  انچ اُتر جائے تو لغاذ کے ناپ میں صغیرا ہستراز کا وقت دریافت کر دو۔

۱۸۔ ایک قائم مخروط ایک طرف میں چکے اندر دو دئے ہوئے سیالوں کی گہرائیاں مساوی ہیں اس طرح ٹکا ہوا ہے کہ اس کا محور انقباضی ہے اور اسکا راس طرف کی تہ کے ساتھ بالہ دیا گیا ہے۔ قائم توازن کی شرط معلوم کر دو۔

۱۹۔ ایک سیدھا یکساں ڈنڈا ایسے مادہ پر مشتمل ہے جس کی کشش (فاصلہ) کے مناسب ہے۔ اس کے گرد ساکن سیال ہے جو سمت اس کی کشش کے ماتحت ہے۔ ثابت کر دو کہ مساوی دباؤ کی سطحوں کی نصف الزہاری تراشوں کی تفرقی مساوات اس شکل

$$\frac{فرلا}{سا} = \frac{لوک}{ر} =$$

میں رکھی جا سکتی ہے جہاں ڈنڈے کے سروں سے نقطہ (لا، ا) کے حاصلے ر، ا تر ہیں اور ڈنڈے کے محاذی اس نقطہ پر زاویہ سا بنتا ہے۔

۲۰۔ مکانی نما کا ایک حصہ، وتر خاص  $m$  و  $n$  ایک مستوی سے جو اس سے  $m$  و  $n$  فاصلہ پر محور پر عمود وار ہے کاٹ لیا گیا ہے۔ اگر مکانی نما کا راس ایک مانع کی سطح کے نیچے  $P$  ہے اور گہرائی پر ثابت کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ساکن رہے گا لیکن اس کا ماسک مانع کی سطح میں ہوگا اگر مانع کی کثافت کو مکانی نما کی کثافت سے نسبت  $49 : 232$  ہو۔

۴۱۔ سیال کی کچھ کثیت (ک) ایک ثابت محور کے گرد دی ہوئی مستقل اوئی رفتار کے ساتھ گھومتی ہے اور محور کے ایک نقطہ کی طرف دی ہوئی قوت سے جذب ہوئی ہے جو فاصلہ کے تناسب سے۔ سیال کی کثافت کسی نقطہ پر ایک دی ہوئی مستقل مقدار اور ایک ایسی مقدار کا مجموعہ ہے جو اس نقطہ پر کے دباؤ سے دی ہوئی مستقل نسبت رکھتی ہے۔ آزاد سطح کی شکل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا اقل نصف قطر (ب) اس مساوات

$$k = m \cdot k' \cdot \frac{r}{r_0} \text{ لا فرلا}$$

سے متعین ہوتا ہے جہاں  $m$  اور  $k$  مستقل ہیں۔  
۴۲۔ ایک دافع قوت فاصلے کے مربع کے بائیس تناسب ہے اور اس کا مرکز ایک متجانس بے پیمائش سیال کی آزاد سطح کے نیچے واقع ہے۔ یہ سیال ساکن ہے اور جاذبہ ارض کے زیر عمل بھی ہے قوت کی شدت اس نقطہ پر جو سیال کی آزاد سطح میں قوت کے مرکز سے انتہائی اوپر واقع ہے جاذبہ ارض کی شدت کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ سیال کی بیرونی سطح ایک افقی متساوی مستوی رکھتی ہے اور قوت کا مرکز ایک اندرونی جوف سے متعلق ہے جس کی چوٹی سیال کی بیرونی سطح میں ہے۔ جوف کا حجم اس کے طول کے رقوم میں معلوم کرو۔

۴۳۔ مربع قاعدے کے ایک قائم منشور کے ساتھ دوسرا منشور جس کا قاعدہ بھی مربع ہے چپکا دیا گیا ہے اس طرح کہ ان کے محور منطبق ہیں اور اضلاع متوازی۔ یہ کل نظام ایک سیال میں اس طرح تیرتا ہے کہ ان کا مشترک مستوی تیراؤ کے مستوی میں ہے۔ اگر منشوروں کے قاعدوں کے اضلاع  $2 : 1$  کی نسبت میں ہوں تو

ان کے انتہائی ارتفاع معلوم کرو تاکہ توازن قائم ہو سکے۔  
۲۴۔ ایک وزنی مکعب ایک ایسے محور کے گرد حرکت کر سکتا ہے جو ایک رخ کے مقابل صلووں میں سے گزرتا اور ان کی تعصیف کرتا ہے۔ اس محور کو افقی طور پر ایک خالی ظرف میں ثابت کر دیا گیا ہے اس طرح کہ مکعب توازن کے محل میں تھما ہوا ہے۔ کس گہرائی تک سیال کو ظرف میں ڈالا جائے کہ توازن غیر قائم ہو جائے۔ مکعب اور سیال کی کثافتوں کی بڑی سے بڑی نسبت معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو سکے۔

یہ فرض کر کے کہ مکعب نصف غرق ہے اور توازن قائم ہے صغیرا متحرک کا وقت معلوم کرو۔

۲۵۔ ایک اسطوانہ جس کا محور انتہائی ہے ایک سیال میں تیر رہا ہے جس میں کبھی نقطہ پر کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی نہ دیں تو یہ اسطوانہ کو اتنا بچھے دیا گیا ہے کہ اس کا اوپر والا رخ سیال کی سطح پر عین منطبق ہوتا ہے اور تب اسطوانہ کو چھوڑ دینے پر اسطوانہ سیال کے عین باہر اٹھ آتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اسطوانہ تیر رہا تھا تو غرق شدہ گہرائی کو اسطوانہ کے ارتفاع سے وہی نسبت ملے گی جو  $\frac{1}{1+0}$  سے ہے۔

۲۶۔ ایک کیساں گردش مکانی نما کا ارتفاع  $t$  اور وتر خاص  $l$  ہے۔ اس کی کثافت اصفائی لچھاؤ اس سیال کے جس میں یہ تیر رہا ہے میں سے ثابت کرو کہ غرق شدہ اس کے ساتھ توازن کا نصف  $\frac{1}{2}$  کے ملے گا۔

۲۷۔ ف (۲-۳) سے ۱

۲۸۔ رقیق مادہ کا ایک ظرف گردش مکانی نما کی شکل کا ہے اور اس میں مائع ہے ثابت کرو کہ توازن ہمیشہ قائم ہوگا بشرطیکہ اندرونی سیال کی کثافت بیرونی سیال کی کثافت سے بڑی ہو۔ ظرف کا وزن نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

۲۸۔ ایک ناقص مخروط انتصابی محور کے ساتھ ایک مائع میں جسکی کثافت اسکی

کثافت کا دو چند ہے تیرتا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$ن^2 > \frac{(۱-ب^۲)}{۱-م} ، جہاں م = \frac{\frac{۱}{۲} (۱+ب^۲)}{(۱+ب^۲)}$$

جہاں ناقص مخروط کا ارتفاع ن اور اسکے رخوں کے نصف قطر ا ب ہیں۔  
نیز ناقص مخروط افقی محور کے ساتھ تیرتا ہو تو توازن قائم ہوگا اگر

$$ن^2 < \frac{۳ (۱+ب) (۱+ب^۲)}{۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲+۲}$$

۲۹۔ مکعب کی شکل کے ایک طرف میں مانع ہے مکعب کا ضلع ۱۲ و ہے۔  
اس کو ۱ نصف قطر کے ایک کابل کھوروے ثابت کر کے سر پر اس طرح رکھ دیا  
گیا ہے کہ وہ ٹکرا ہے۔ طرف کے وزن کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ اگر انتصابی  
رخوں کے متوازی مستویوں میں ہٹاؤ پیدا کئے جائیں تو توازن قائم ہوگا بشرطیکہ  
مانع کی گہرائی ۴ و اور ۶ کے درمیان ہو۔

۳۰۔ ایک متساوی الساقین مثلثی پتہ جس کے اضلاع ا ب ج مساوی  
ہیں ایک مانع میں جس کی کثافت گہرائی کے متناسب ہے نیچے وار براس کے  
ساتھ تیرتا ہے اگر ۱۵، ب ج پر عمود ہو اور اگر پتہ اس طرح تیر سکتا ہو کہ خط ۱۵  
انتصابی سمت سے زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ طہ اس مساوات

$$۸۱ \text{ نہ جب } ۲ طہ = ۶۴ \text{ ث حجم } ۲ عم (جب ۲ طہ - جب ۲ عم)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ جہاں زاویہ ب ج ۲ عم ہے اور پتہ کی کثافت ۱۵،  
اور ا ب یا ج کے متساوی گہرائی پر مانع کی کثافت ۱۵ ہے۔

۳۱۔ ایک گرد بنی مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیرتا ہے۔ اس کے محور کے  
ایک ثابت نقطہ پر اوزان رکھ کر اس کو مختلف گہرائیوں تک ڈبو یا گیا ہے ایسی شکل معلوم  
کر دو اگر توازن ہمیشہ قائم رہے۔

۳۲۔ اگر ایک جسم سکون میں تیرے تو ثابت کرو کہ کسی ہٹاؤ کے لئے سیال کی



ایسے مستوی سے کاٹ لیا جائے جو اسکے محور پر عمود وار ہے اور اگر اسکو نیچے وار  
 اس کے ساتھ مانع میں غرق کر کے ایک چھوٹے زاویہ میں پھرا دیا جائے تو اسے زاویہ عیار  
 کہتے ہوئے حصہ کی مقدار پر منحصر نہیں ہوتا ثابت کر دو کہ اگر  $\alpha = \phi$  (لا) تکونی  
 منحنی ہو تو  $\phi$  کو معین کرنیوالی مساوات ہے

$$[ن(لا)] = [ا + \{ف(لا) + ف(لا) + ف(لا)\}] [ن(لا)]$$

جہاں مجسم کی کثافت بلحاظ سیال کے  $\theta$  ہے۔  
 ۳۶ — نصف قطر کے ٹھوس نیم کرہ سے ایک حصہ علیحدہ کر لیا گیا ہے یہ حصہ قائم  
 اسطوانہ کی شکل کا ہے جس کا ارتفاع  $\phi$  ہے اور جیکا محور کرہ کا محور اور جس کے قاعدہ  
 کا مرکز کرہ کا مرکز ہے۔ کرہ کے اس حصہ میں ایک پتلی نلی رکھی گئی ہے جو اس میں  
 ٹھیک بیٹھ جاتی ہے۔ پھر اس کو نیچے وار راس کے ساتھ ایک سیال میں رکھ کر  
 نلی میں  $\theta$  کثافت کا سیال ڈالا گیا ہے۔ معلوم کر دو کہ کس قدر سیال اس میں  
 ڈالا جائے کہ توازن تبدیل ہو جائے۔ اگر نلی میں  $\phi$  ارتفاع تک سیال  
 داخل کیا جائے تو ثابت کر دو کہ

$$\frac{\theta}{\phi} = \frac{\rho - \rho'}{\rho'}$$

جہاں ٹھوس جسم کی کثافت  $\theta$  ہے۔

۳۷ — ایک جسم متغیر کثافت کے مانع میں تیر رہا ہے۔ اس کے محل میں ذرا سی  
 تبدیلی کر دی گئی ہے اس طرح پرکہ ہٹائے ہوئے مانع کی کثیت غیر متبدل رہتی ہے۔  
 اگر  $\gamma$  گہرائی پر کثافت  $\phi$  (ی) ہو اور جسم کی فرق شدہ سطح میں کے کسی نقطہ  
 کے محدود (لا، لا، ی) ہوں جبکہ سطح کو حوالے کا مستوی لا فرض کیا جائے  
 تو ثابت کر دو کہ تیراؤ کے مستوی میں کا وہ نقطہ جسکے گرد جسم گھومتا ہے اس مستوی  
 کا مرکز ثقل ہے جسکو ایک پتھرے کے مانند خیال کیا گیا ہے جسکی کثافت  
 نقطہ (لا، لا، ی) ہے۔

(۲۲۵)

۳۸ — ایک پیالہ کی بیرونی سطح لی وتر خاص کا ایک مکافی نما ہے اور



اسکی موٹائی اتنی سمیت میں ہر نقطہ پر ایک ہی ہے اور بمقابلہ ل کے بہت چھوٹی ہے۔  
یہ پیالہ راس کے اوپر ف ارتفاع پر دائری گورہ کہتا ہے اور نصف قطر کے ایک  
کرہ کے بلند ترین نقطہ پر ٹکا ہوا ہے۔ اگر اس میں اتنا پانی ڈالا جاسکے کہ اس کی  
سطح پیالہ کے محور کو راس سے  $\frac{1}{2}$  ف فاصلہ پر قطع کرے اور اگر پانی کا وزن  
پیالے کے وزن کا چار گنا ہو تو ثابت کر دو کہ توازن قائم ہو گا اگر

$$\frac{F}{L} > \frac{r}{r + \frac{1}{2}F}$$

۳۹ — ایک متساوی الساقین مثلثی پترا ا ب ج ساکن ہے اس طرح  
کہ اس کا مستوی انتصابی ہے اور راس ج مانع کی سطح کے نیچے گ گہرائی  
پر ثابت ہے۔ مانع کی کثافت گہرائی کے متناسب ہے۔ اگر پترے کی کثافت آئی ہو  
جتنی کہ مانع کی کثافت گہرائی دہرے اور مثلث کا ارتفاع ف سمت انتصابی کے  
ساتھ زاویہ ط بنا ہے تو ثابت کر دو کہ

$$۸ د ف^۲ ج م^۲ (ط - ع) = ۳ گ^۲ ج م^۲ ع ج م ط$$

جہاں زاویہ ا ب ج = ۲ ط - ع۔

۴۰ — ۲ ف ارتفاع اور نصف قطر کے محور اسطوانہ کے اندر پانی ہے  
اور اسطوانے کے سرے بند ہیں اسکو نصف قطر کے ایک گہرے کرہ پر سطح  
رکھا گیا ہے کہ اس کے قاعدے کا مرکز کرہ کے بلند ترین نقطہ کو مس کرتا ہے۔  
پانی کا وزن اسطوانے کے وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کر دو کہ توازن قائم  
ہو گا اگر اسطوانہ میں پانی کے ارتفاع کا طول مساوات

$$۲ ل - ۳ (۲ ر - ف) ل + ۲ = ۰$$

کی اصولوں کے درمیان واقع ہو۔

۴۱ — گروشی مکانی نما کی شکل کا ایک بے وزن خول ایک متشابہ خول میں ٹکا  
ہوا ہے جسکا مبدل قبل الذکر کے مبدل کا دو چند ہے اس کے اندر سیال ہے



ثابت کرو کہ زمین کے مرکز سے رفاصلہ پر دباؤ د ہے ایسا کہ

$$\text{لوک } \frac{د}{ج} = \frac{ج \text{ ث } (1 - \frac{1}{ن})}{(1 - \frac{1}{ن})}$$

جہاں زمین کا نصف قطر ۱ ہے۔

اگر ن = ۱ تو ثابت کرو کہ ایک کرہ کی غبار کے کا حجم جبکہ مادہ تمام سمتوں میں مساوی طور پر امتداد پذیر ہے بڑے سے بڑا ہوگا جب راس مساوات

$$ج (م - ۱) \frac{۱}{م} = \frac{۱}{م} \left\{ ۱ - \frac{۱}{م} \right\} \frac{۱}{م} = \frac{۱}{م} \left\{ ۱ - \frac{۱}{م} \right\} \frac{۱}{م}$$

سے معلوم ہو جہاں م =  $\frac{ج \text{ ث } ۱}{ج}$ ، چوک کی قدر لے، اور غبار سے ہر قدر قتی نصف قطر ک ہے۔ یہ معلوم ہے کہ جب غبار زمین سے اٹھتا ہے تو عین پیرا ہوتا ہے اور اس کا نصف قطر قدرتی ہوتا ہے۔

۴۶ — ایک غبار کسی خاص لمحہ میں ف بلندی پر ہے، م رفا سے نیچے اترتا ہے اور افقی سمت میں م رفا سے حرکت کرتا ہے جو اس بلندی پر ہوا کی رفتار سے ہے۔ اگر ہوا کی رفتار بلندی کے متناسب ہو اور اگر کسی خاص مقام پر اترنے کے مقصد سے گیس کو اس طرح خارج کیا جائے کہ آمار کی رفتار مستقل رہے تو ثابت کرو کہ ابتدائی بلندی کے اندازے میں فرق کی خطا واقع ہونے سے جس نقطہ پر غبار پہنچتا ہے اس نقطہ میں

$$\frac{م \text{ فرق}}{ک} = \left\{ ۱ + \frac{۱}{ک} - \frac{۱}{ک} \right\} \frac{۱}{ک}$$

کی خطا پیدا ہو جائے گی جہاں ک =  $\frac{ج \text{ ث } ۱}{ج}$

۴۷ — ثابت کرو کہ سیمٹن (Smeaton) کے ہوا پمپ کی (ن + ۱) ایں

ضرب میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$\left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a+b} \right)$$

کے مساوی ہے اگر ہوا کے پھیلاؤ کو ہم پیشی فرض کر لیا جائے جہاں اُتر قابلہ کا اور دب نالی کا حجم ہے۔

۴۸۔ اگر آکٹیف ہم پیشی ہو تو ایک مکثف کی ن دیں ضرب میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرو۔

۴۹۔ اجم کے ایک قابلہ میں اگر ب گنجائش کے ایک مکثف کرنے والے پمپ سے ہوا اس قدر تیزی سے داخل کی جائے کہ ایصال سے حرارت کا جو نقصان ہوتا ہے اس کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے تو ثابت کرو کہ ن ضربوں کے بعد قابلہ میں ہوا کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ کا  $(1+n)$  حصہ ہوگا۔ یہ معلوم کرو کہ قابلہ میں پیش کیا ہے اور چپکالے میں جو کام ہوا اس سے دریافت کرو۔

نیز قابلہ میں ہوا کا دباؤ معلوم کرو جبکہ ایصال سے پیشی توازن پھر برقرار ہو جائے۔

۵۰۔ دی ہوئی کیت اور نصف قطر کا ایک ٹھوس کر دی مرکزہ لچکدار سیال (د = کث) کے تجاذبی کرہ ہوائی سے گھرا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ دباؤ کا تعین کر نیوالی مساوات ہے

$$P = \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{d} \right)$$

مکن شرطوں کے تحت دباؤ کی شکل  $\frac{1}{d}$  ہو سکتی ہے۔

۵۱۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین کے اندر مساوی کثافت کی سطحیں ہم مرکزہ کرے ہیں اور دباؤ اور کثافت میں ربط  $d = \frac{1}{k}$  (ث۱ - ث۲) ہے جہاں ث۱ سطح پر کی

کثافت ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{نٹ} = \frac{\text{راجب } ۲۲ \frac{۱}{۲} \text{ کرک}}{\text{رجب } ۲۲ \frac{۱}{۲} \text{ کرک}}$$

جہاں زمین کا نصف قطر ہے اور مرکز سے زیر بحث نقطہ کا فاصلہ۔  
کمیت کی تجاذبی اکائی یہاں استعمال کی گئی ہے اور زمین کی فوری گردش کا  
اثر نظر انداز کیا گیا ہے۔

۵۲۔ ایک ٹھوس جسم دو کعبوں پر مشتمل ہے جو متشاکلاً باہم ملائے گئے ہیں  
لیکن مختلف مادے اور مختلف جسامت کے ہیں۔ یہ ٹھوس ایک سیال میں بہ طرح  
تیرتا ہے کہ مشترک سطح مستوی سیال کی سطح میں ہے۔ تاقیت کی شرط معلوم کرو۔

۵۳۔ ایک ٹھوس جسم گردش مکانی نما کی شکل کا ہے اور انتصابی محور کے  
ساتھ تیرتا ہے۔ اگر مرکز ثقل مرکز مابعد پر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔  
۵۴۔ ایک ٹھوس جسم گردش مکانی نما کی شکل کا ہے اور ایک مانع میں جس کی  
کثافت مکانی نما کی کثافت کان گنا ہے تیرتا ہے۔ اگر مکانی نما کا ارتفاع  $\theta$   
ایسا ہے کہ اس کا مرکز ثقل مرکز مابعد کے اوپر رک بلندی پر ہے تو ثابت کرو کہ توازن  
کا ایک مثل ایسا ہے جس میں محور انتصابی نہیں ہوتا اور قاعدہ پوری طرح مانع کے  
باہر رہتا ہے اگر  $\theta > (1 - \frac{1}{n})$ ۔

۵۵۔ ایک جہاز کے پہلو بانی کے قریب انتصابی ہیں اور ہٹائے ہوئے بانی کا  
مرکز ثقل  $\gamma$  گہرائی پر ہے۔ جہاز کی کمیت  $k$  ہے۔ ایک چھوٹا بوجھ  $h$  ک  
جہاز پر متشاکلاً رکھا گیا ہے جس کی وجہ سے جہاز بقدر  $r$  گہرائی کے اور  
ڈوب جاتا ہے۔ اور  $\gamma$ ،  $\gamma$ ،  $\gamma$  معنی ہو جاتا ہے۔ صغیر مقداروں کے مربعوں  
کو نظر انداز کر ثابت کرو کہ

$$\text{معنی} = \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{2} \gamma$$

۵۶۔ ایک متجانس ناقص نما مانع میں اس طرح تیرتا ہے کہ اس کا اصل محور

ج و ج انتصابی ہے اور وزن و ناقص نما کے وزن کا  $\frac{۳}{۵}$  (اوپر کے سرے ج پر ثابت کر دیا گیا ہے اس طور پر کہ تیراؤ کا مستوی مرکز میں سے گزرتا ہے۔ اگر ناقص نما کو اوسط محور ب کے گرد ایک محدود زاویہ ط میں گھما دیا جائے تو ثابت کرو کہ جنت کا معیار جو اس کو اس محل میں رکھے گا

د { ج - ا زا' جم ط (۱- ز' جم ط )  $\frac{۱}{۲}$  } جب ط

ہوگا جہاں تراش (ا' ج) کا خروج المکز ہے۔

۵۷۔ جہاز کے عرشہ پر کے وسطی خط سے ج فاصلہ پر وسط میں ک ش کیت رکھ دی گئی ہے جسکی وجہ سے جہاز ایک طرف بقدر چھوٹے زاویہ ط کے جھک جاتا ہے۔ جہاز کا کل ہٹاؤ مٹن ہے۔ ثابت کرو کہ اس کیت کی عدم موجودگی میں مرکز ثقل کے اوپر مرکز البعد کی بلندی تقریباً  $\frac{ک ج}{ب ط}$  کے مساوی ہوگی اور اس جگہ کو دوسرے رتبہ تک صحیح بنانے میں مقدار

ک (ب -  $\frac{۱}{۲}$  فرج ) فرج

کا اس میں اضافہ کرنا پڑے گا۔ جہاں خط آب کے اوپر ک کے مرکز ثقل کی بلندی ب ہے پینڈے کی گہرائی گ ہے، خط آب کی تراش کا رقبہ (ا اور جود کا معیار ج ہے جن کا تقریباً معلوم ہونا فرض کر لیا گیا ہے۔

۵۸۔ تجاذبی کیت میں ایک چھوٹا کر دی جوت ( نصف قطر = س ) ہے جس کو متجانس بے پچک سیال سے بھر دیا گیا ہے اور کرہ کے مرکز پر ک کشش بالکل معدوم ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا سیالی دباؤ -  $\frac{۱}{۲}$  ث ج سراسے کم اور جوت کی سطح

پر کل دباؤ - ( ج +  $\frac{۳}{۲}$  ث )  $\frac{۳}{۲}$  ث سراسے کم نہیں ہو سکتا۔ جہاں سیال

کی کثافت ث ہے اور تجاذبی کیت کے قوتہ کو ذ سے تعبیر کریں تو عنصر فرس کے لئے جو مرکز سے کسی سمت میں کھینچا گیا ہے مرکز پر  $\frac{ذ فرس}{فرس}$  کی اقل جبری قیمت ج ہے۔

۵۹۔ پانی کا ایک اسطوانی حوض ایک افقی محور پر جھول سکتا ہے۔ یہ محور حوض کی ایک عمودی تراش کا قطر ہے اور اسطوانہ کے ارتفاع کے وسطی حصہ کے نیچے واقع ہے۔ ثابت کرو کہ پانی باہر نکل پڑنے کے پیشتر حوض میں پانی کی مقدار اگر اس کی سطح آزاد ہو (یعنی اگر حوض پر ڈبلکن نہ ہو) بہ نسبت اس پانی کی مقدار کے کم رہ سکے گی جو اس میں رہتی اگر اس پر ڈبلکن ہوتا۔ اگر قبل الذکر صورت میں گردش کے محور کے اوپر ف بلندی تک پانی چڑھ سکتا ہو تو ثابت کرو کہ موخر الذکر صورت

میں اس کی اس بلندی میں (ف + ۲ کہ ۲) - ف کا اضافہ ہو سکتا ہے جہاں گردش کے محور کے لحاظ سے رقبہ ا کی عمودی تراش کا چود کا معیار ا کہ ۲ ہے۔

۶۰۔ مساوی وزن اور نصف قطر ا کے دو کروی بند غباروں کے اندر ایک ہی قسم کی گیس کرہ ہوائی کے دباؤ π پر مساوی مقداروں میں ہے ایک غبار تو استوائی پائیرادے سے بنایا گیا ہے اور دوسرا استوائی پائیرادے سے جسکی لمبائی کی قدر ع ہے۔ ان غباروں کو ایک ہی بلندی پر ایک ہلکی رسی کے سرورں پر تھاما گیا ہے جو ایک چکنی چرخ پر سے گزرتی ہے اگر رسی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ غباروں کی بلندیوں میں فرق جب وہ توازن میں ہوں

$$\frac{\pi}{3} \text{ ٹ} \text{ کوک } \frac{1}{3} \text{ ہوگا جہاں مساوات } ۲ - ۱ - ۲ - \frac{\pi}{3} \text{ ٹ} = \frac{\pi}{3} \text{ ٹ} \text{ ج} \text{ ٹ} \text{ ع} = \text{کی}$$

حقیقی اصل ہے۔ رسی کا تناؤ ت ہے اور دباؤ π پر ہوا کی کثافت ٹ ہے۔  
تبیش کو مستقل فرض کر لیا گیا ہے۔

۶۱۔ ایک چکدار بے تنی ہوئی دائری جہلی کے محیط پر ایک استوار انگوٹھی ثبت کر دی گئی ہے۔ اس کے ایک رخ پر سیالی دباؤ عمل کرتا ہے جس سے جہلی ایک گردشی سطح کی شکل اختیار کر لیتی ہے۔ یہ معلوم کیا گیا کہ کوئی جھوٹا مربع جو بے تنی ہوئی حالت میں جہلی پر بنایا جائے اور جس کا ایک ضلع ایک نصف قطر واقع ہو تو تنی ہوئی حالت میں ایک مستطیل میں تبدیل ہو جاتا ہے جس کے ضلعوں کی نسبت مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ جہلی کی یہ فی شکل مخروط ہونی چاہیے۔ اس پر کے سیالی دباؤ

کا قانون معلوم کرو۔

۶۲۔ اگر یہ دیا جائے کہ بانی کا سطحی تناؤ ۲۰۱ مئی پر ۸۱ ڈاین فی سنتی میٹر

ہے اور  $\frac{فرس}{فرس} = ۵۰$ ۔ بتاؤ صابوں کے ایک ببلے کے پھیلاؤ کی شرح دریافت کرو جیسے قیث ت بڑھتی جائے۔

۶۳۔ لزج سیال کا ایک قطرہ اپنے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھومتا ہے اور سطحی تناؤ کے سوا کسی قوت کے زیر عمل نہیں ہے اس کی شکل کو ایک گردشی سطح کی شکل مان کر اور ماکو گردش کے محور پر مرکز سے ناپنے سے ثابت کرو کہ نصف النہار ہی یعنی اس مساوات

$$\frac{فرس}{فرس} = \frac{لا(لا + ک)}{۲(۲ + ک) - لا(لا + ک)}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں لا استوائی نصف قطر ہے۔

۶۴۔ ایک نلی قدرتی نصف قطر لا کے قائم مستدیر اسطوانہ کی شکل کی ہے اور کامل ملائم مادے سے بنی ہے جو مکونوں کی سمت میں امتداد نا پذیر ہے لیکن مکونینی دائروں کی سمت میں پکڑا رہتا ہے۔ ٹھیک بیچنے والی دو تہالیاں اس کے سروں پر اچھی طرح ثبت کر دی گئی ہیں اور پھر دسے ہوئے دباؤ کی گیس اس میں داخل کی گئی ہے۔ تہالیاں آزادانہ طور پر ایک دوسرے کے قریب آسکتی ہیں ثابت کرو کہ نصف النہار ہی تراش کی تقریبی مساوات ہے

$$۲ \frac{فرس}{فرس} + ۲ = م(۱ - لا) \left( \frac{فرس}{فرس} \right)^۳$$

جہاں م ٹھیک اور دباؤ کا تفاعل ہے۔

تمام جاؤں کے لئے نلی کے صدی نصف قطر اغت تہالیں پر ۲ اور ا کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

نلی کے مختلف ابتدائی طولوں کے لئے سب سے چوڑے نقطہ پر نصف النہار کی



تراش کا انحنائے اعظم  $\frac{p}{4} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)$  ہے اور دوسرا قدری انحنائے  
 $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)$

۶۵۔ کہ کیت کے صابونی بیلے میں ہوا سہمہ جو کلیہ بال کی پابندی کرتی ہے۔  
 اور جلی کا تناؤ (ت) نصف قطر کی چھٹی تبدیلیوں سے متغیر نہیں ہوتا۔ چنی ٹل آؤن  
 کے گرد چھوٹے استیزات کر رہی ہے۔ اگر جلی کی گردی شکل میں کوئی تسبیہی  
 واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ استیزا کا وقت  $\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{g}}$  ہے جہاں  $a$  کا جو قطر اعداد کیسا  
 کیا ہے اور بیلہ خلا میں رکھا گیا ہے۔

۶۶۔ ج مبدل کے ایک ذخیرہ کو ایک وتر کے گرد جو مرتبہ کے متوازی  
 اور اس سے ک فاصلہ پر ہے لٹا کر ایک بند سطح حاصل کی گئی ہے۔ اگر اس میں  
 دو کثافت کا مائع بھردیا جائے جو یکساں زادی رفتار سے غور کے گرد گھوم  
 رہا ہے اور اس کو اسی قسم کے لٹ میں ڈوبا جائے اور اگر اس میں ایک سوراخ  
 ہو جس میں سے بیرونی و اندرونی تارخ کی آمدورفت ہو سکتی ہے تو ثابت کرو کہ  
 غور سے فاصلے پر صدری تناؤ ہو گا۔

$$\frac{1}{2} \text{ سینٹر (کے - ر)} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2} \text{ سینٹر (کے - ر)}$$

۶۷۔ اگر ایک صابونی بیلے کے ذرات فاصلے کے معکوس مربع کے قانون  
 کے ہو جب ایک دوسرے کو مدخ کریں اور اگر ذوقہ ہو تو ثابت کرو کہ  
 $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{14}$  رت ہجہاں ر بیلے کا نصف قطر اور ت متاؤ ہے۔

۶۸۔ پتلی کے ایک گردی خول میں (نصف قطر  $a$ ) آٹا یا فی زور سے داخل کیا گیا  
 کہ اس کا نصف قطر تک پھیل جاتا ہے۔ اگر خول کی چاک کی شرح اپنے میں  
 رہو اور پانی کے پچکاؤ کی شرح  $R$  تو ثابت کرو کہ خول میں پانی کی مقدار ہے



ہوئی ہوا ضرب کے اس حصہ عمل میں خزانہ سے داخل ہوتی ہے اور ضرب کے بقیہ حصہ عمل میں پھیل کر کہ ہوائی کے دباؤ پر خارج ہو جاتی ہے۔ خارج ہوتے وقت اس ہوا کی تپش گنتی ہوتی ہوتی ہے مگر اسطوانوں کے حجم  $\pi$  اور  $\pi$  ہوں اور اگر پچکاؤ اور پھیلاؤ کو حرنا گزر فرض کر لیا جائے تو ثابت کرو کہ ہر ضرب میں پہلے اسطوانہ

میں جو کام ہوتا ہے وہ  $\pi \pi \frac{\pi}{\pi - 1} \times \frac{\pi - \pi}{\pi}$  ہے اور دوسرے اسطوانہ میں

$\pi \frac{\pi}{\pi - 1} (\pi - \pi)$  ہے۔  $\pi$  کہ ہوائی کا دباؤ ہے۔ (ڈاکٹر ایکنسن)

۱۔ — ثابت کرو کہ سطحیں ٹھوس زمین پایاب سمندر سے گھری ہوئی ہے جو دور کے ایک جسم کے زیر کشش ہے۔ اگر پانی پر خود اس کی کشش نظر انداز کر دی جائے تو ثابت کرو کہ سمندر کی سطح کر دی رہی لیکن اس کا مرکز زمین کے مرکز سے بقدر اس فاصلے کے ہٹ جائیگا جو اس کے نصف قطر کو تجاذبی جسم کی کشش سیال کے ایک عنصر پر دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

زمین کی کشش اسی عنصر پر  
۲۔ اگر زمین کو کر دی فرض کر لیا جائے اور اس کے گرد کم گہرائی کا ایک سمندر ہو اور اگر پانی کے ذرات کی کشش ایک دوسرے پر نظر انداز کر دی جائے تو ثابت کرو کہ وہی سمندر کی ہلیجیت مساوات

$$\frac{\text{استوار پر مرکز گریز قوت}}{\text{زمین کی سطح پر جاذبہ ارض کی قوت}} = 2$$

سے حاصل ہوگی۔

۳۔ سیال کی کچھ مقدار ایک مادی لمبوترے کرہ نما کی سطح پر پھیلا دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ سیال کی آزاد سطح بھی کرہ نما ہے اور استوار پر سیال کی گہرائی کو جو نسبت قطب پر کی گہرائی سے ہے وہی نسبت کرہ نما کے محور اعظم کو محور اصغر سے ہے۔

۴۔ اگر زمین کے گرد کم گہرائی کا ایک سمندر ہو تو ثابت کرو کہ عرض بلد پر

سمندر کی گہرائی تقریباً گ (۱۔ صہ جب ل) ہوگی جہاں گ استواء پر کی گہرائی اور صہ زمین کی بلبلجیت ہے۔

۵۵۔ اگر مانع ایک ثابت محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو اور اگر اس کے ذرات ایک ایسے قانون کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہوں کہ مساوی و باؤ کی سطحیں ہم محور متشابہ چپٹے کرہ نما ہوں تو ثابت کر دو کہ کسی کرہ نما کی حاصل کشش جس کے ذرات اسی قانون کے بموجب جذب کرتے ہیں دو قوتوں کا حاصل ہوگی جو علی الترتیب استواء پر اور گردش کے محور پر عمودار ہیں اور علی الترتیب ایسے بدلتی ہیں جیسے جذب ہونے والے نقطہ کا استواء اور محور سے فاصلہ۔

۵۶۔ دفعہ ۱۹ کی صورت میں ثابت کر دو کہ تمام مانع میں اوسط و باؤ ناقص نما کے مرکز پر کے و باؤ کا  $\frac{1}{2}$  ہوتا ہے۔ اگر آزاد سطح کی مساوات

$$1 = \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}$$

ہو اور مانع کی کمیت ہر تو ثابت کر دو کہ نظام کی توانائی با فعل

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) \frac{v^2}{a^2}$$

ہے جہاں مانع کی کشش کے باعث محوروں لا، ب، ج کے سروں پر کی قوتیں  $\frac{1}{2} m v^2$  ہیں۔ گردش محوری کے گرد ہوتا ہے۔

۵۷۔ دفعہ ۱۸ کی صورت میں مانع کی کمیت کے اندر دو فی حصہ کے کسی نقطہ پر و باؤ معلوم کر دو جبکہ لا اس قدر چھوٹا ہو کہ لا نظر انداز ہو سکے۔

اس صورت میں اگر بلبلجیت ن ہو تو ثابت کر دو کہ استوائی مستوی پر

کا و باؤ قوت کی تقریباً (۵-۶) (۱۱) ث  $\frac{1}{2}$  / ۱۵ فلکی اکائیوں کے مساوی ہوگا۔

جہاں لا اسطوانی نصف قطر ہے۔

۵۸۔ ث کثافت کے نچاؤ بی یکساں مانع کی لا متناہی کمیت لا انتہا طویل اور پتلے استوار اسطوانے کو گھیرے ہوئے ہے۔ اسطوانہ کی عمود سی تراش

تعلق ناقص ہے جسکے محاور ۲ و ۲ بت ہیں۔ مانع اور اسطوانہ دونوں اسطوانہ کے محور کے گرد یکساں زاویہ رکھتا رہتا ہے۔ ثابت کر دو کہ آزاد سطح کی ممکن شکل ہم اسکی ناقصی اسطوانہ ہے جسکے محاور ۲ و ۲ بت ہیں ایسے کر

$$\text{سہ } (۱ + ۲) = ۳ \text{ ث (۱ ب - ۲ ب)}$$

۷۹۔ متجانس مانع کی کمیت (ک) اضافی توازن میں ایک ثابت محور کے گرد یکساں زاویہ رکھتا رہتا ہے اس طرح کہ اس کی سطح کی ہیلجیت (صہ) چھوٹی ہے۔ اگر کمیت کا مرکز حصہ مرکز پر ایک لائن ہی کمیت مادی نقطہ کی شکل میں منبجہ ہو جائے اور قبیہ حصہ (۱- صہ) ک کی کثافت کو نسبت ۱- صہ : صہ میں گھٹا دیا جائے تو توازن کی صورت میں اس نئی سطح کی ہیلجیت کیا ہوگی اگر گردش کا وقت وہی فرض کیا جائے جو پہلے تھا۔

۸۰۔ یکساں کثافت کا ایک ٹھوس ناقص نما اپنے اقل محور کے گرد گھومتا ہے اور اس کے گرد مختلف کثافت کے متجانس مانع کا ایک غلاف ہے جسے یہ ساتھ لئے رہتا ہے کل کمیت قانون قدرت کے بموجب کشش رکھتی ہے۔ ان شرائط کا معلوم کرنا مطلوب ہے جن کے پورا ہونے پر آزاد سطح ناقص نمائی شکل اختیار کرے (Prof. Townsend, Math of Ed. Tinus Vol. xxxv)

۸۱۔ ث + ث کثافت کے ٹھوس کروں کی کچھ تعداد ث کثافت کے سیال میں متوازن ہے کل نظام ایک جوف کرہ میں ہے۔ اگر کل کمیت تجاذبی ہو تو ثابت کر دو کہ کروں کی کمیت کا مرکز جوف کرہ کے مرکز پر ہونا چاہیے۔ نیز اگر صرف دو کرے ہوں تو نقطہ تماس پر ان کے درمیان دباؤ ہوگا

$$\frac{۱}{۲} \pi a^2 b^2 \left\{ \frac{\text{ث}}{(۱ + ۲) \text{ب}} + \frac{\text{ث}}{(۱ - ۲) \text{ب}} \right\}$$

جہاں ۱ ب کروں کے نصف قطر ہیں۔

۸۲۔ ایک ٹھوس متجانس ناقص نما کے اندرونی حصہ میں ایک ہم مرکز کر دی خول ہے جو بے پچک متجانس سیال سے بھرا ہوا ہے۔ کل مادہ قانون قدرت کی



قوت کے تجاذبی میدان میں متوازن ہے۔ اگر ایک ٹھوس کرہ ابتداءً سب سے اوپر کے مانع ثن میں پوری طرح ڈوبا ہوا ہو اور پھر اسکو آہستہ آہستہ نیچے ڈھکیلا جائے یہاں تک کہ یہ پوری طرح سب سے پچھلے مانع ثن میں پوری طرح غرق ہو جائے اور اگر کرہ کا حجم بمقابلہ ہر مانع کے حجم کے چھوٹا ہو تو ثابت کر دو کہ سیالی دباؤ کے خلاف جو کام ہوتا ہے وہ تقریباً

$$C \{ (C_1 - C_2) \text{ ثن} + (C_2 - C_3) \text{ ثن} + \dots + (C_n - C_{n+1}) \text{ ثن} \} -$$

$$+ (C_n - C_{n+1}) \text{ ثن} \}$$

کے مساوی ہے جہاں C اور C کرہ کے ابتدائی اور آخری سطحوں میں اس کے مرکز

پر کے قوتے ہیں اور  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ ، فاصل سطحوں پر کے قوتے ہیں۔

۸۶ — دو تجانس کرے ث کثافت کے بے پچک متجانس سیال میں غرق اور ساکن ہیں۔ کرویوں کے نصف قطرب اور ب اور کثافتیں ث اور ث ہیں کمیتوں کی پیمائش تجاذبی اکائیوں میں کی گئی ہے۔ کل کمیت کو ایک استوار کردی لٹاؤ میں بند کر دیا گیا ہے جس سے وہ عین بھر جاتا ہے۔ ثابت کر دو کہ ث کثافت کے کرہ پر

عمل کرنیوالی کشش اور دباؤ کی سب قوتیں اسی قوت  $\frac{1}{4} \pi \text{ ث} (ث - ث) \text{ ب}^3 \text{ ج}$  اور

دفاعی قوت  $\frac{1}{4} \pi \text{ ث} (ث - ث) \text{ ب}^3 \text{ ج}$  میں تحویل ہو سکتی ہیں جبکہ قبل الذکر

دفاعی قوت لفافے کے مرکز سے اور موخر الذکر دوسرے کرہ کے مرکز سے باہر وار عمل کرے ج لفافے کے مرکز سے اور د دوسرے کرہ کے مرکز سے زیر بحث کرہ کے مرکز کے فاصلے ہیں۔

۸۷ — کچھ تجاذبی کمیت جسکی سطح ہم قوتہ سطح ہے سیال سے گھری ہوئی ہے۔ سیال کی کشش بالذات نظر انداز کیجا سکتی ہے ثابت کر دو کہ کسی نقطہ پر کا دباؤ سطح پر کے





## فہرست اصطلاحات

نوٹ :- ان اصطلاحات کو اردو حروفِ بھیجی کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے۔

Water line area

آب خط رقبہ

Centre of buoyancy

اچہال کا مرکز

Surface of buoyancy

اچہال کی سطح

Calculus of variations

احصائے تغیرات

Inferior limits

ادنیٰ حدود

Flying wheel

اُڑ پیہ

Restorative moment

استروادی معیار

Thermal capacity

استعداد حرارت

Meridional section

استوائی تراش

Radiation

اشعاع

Relative equilibrium

اضافی توازن

Superior limits

اعلیٰ حدود

Extensible

استداپذیر

Inextensible	استنداد ناپذیر
Freezing machine	آبخادی مشین
Deflection	انحراف
Upward pressure	اوپر وار دباؤ
Apses	اوجین
Mean centre	اوسط مرکز
Conduction	ایصال
Load	بار
Barometer	باریمیا
Upper limit	بالائی حد
Vapour	بخار
Evolute	برہمچیم
Dilatation	بسط
Incompressible	سجھک
Lamina	پتہ
Compression	چھک
Compressible	چھک پذیر
Metacentre	پس مرکز مرکز ابعاد
Paddle steamer	پدکھانی جہاز
Lune	پہمانگ
Turn of a helix	پہیر (مغزلہ کا)
Hold of a ship	پیشا (جہاز کا)
Screw	پیچ
Screw-steamer	پیچ بانی جہاز
Constant of gravitation	تجاوب کا مستقل

Gravitating solid	تجاذبی ٹھوس
Configuration	تشکیل
Counterbalance	تعدیل کرنا
Variation	تغیر
Righting moment	تقویمی معیار
Line of contact	تماسی خط
Tension	تناؤ
Tensile	تناوی
Kinetic energy	توانائی بالفعل
Potential energy	توانائی بالقوہ
Line of floatation	تیراؤ کا خط
Plane of floatation	تیراؤ کا مستوی
Surface of floatation	تیراؤ کی سطح
Floating bodies	تیرنے والے اجسام
Lintearia	نوبہ
Self-attracting	جاذب بالذات
Life-belt	جان بٹی
Algebraical moment	جبری معیار
Couple	جفت
Product of Inertia	جمود کا حاصل ضرب
Film, membrane	جلی
Oblate spheroid	چپٹا کرہ نما
Annulus	چنبر
Thread	چوڑی (نیچ کی)

Boundary conditions

حدود دی شرطیں

Terminal conditions

حد دی شرطیں

Specific heat

حرارت نوعی

Adiabatic

مزنا گذر

Convective equilibrium

حلی توازن

Water line

خط آب

Cycloid

خط تدویر

Line of action

خط عمل

Line of greatest slope

خط میلان اعظم

Shell

خول

Period

دور

Bifurcation

دو شاخگی

Shaft

دھرا

Impulsive tension

دھکا تناؤ

Wall-sided ship

دیوار پہلو جہاز

Sheet iron

ڈیلا ہوا لہا

Intrinsic pot. energy

ذاتی توانائی بالقوہ

Intrinsic equation

ذاتی مساوات

Quarter-period

ربعی دور

Areal section

رقبہ تراش

Wrench

رسیج

Hyperboloid

زائید نما

Hyperboloid of one sheet

زائید نما اک چادری

Hyperboloid of two sheets

زائید نما دو چادری

Saturn

زحل

Catenary	زنجیرہ
Catenoid	زنجیرہ نما
Stress	زور
Lower limit	زیرین حد
Stern	سکان
Trilinear co-ordinates	سہ خطی محدد
Fluid	سیال
Perfect fluid	سیال کامل
Capillary curve	شمارہ منحنی
Soap-bubble	صابونی ببلہ
Principal curvature	صدری انحناء
Principal axes	صدری محور
Principal tension	صدری تناؤ
Anticlastic	ضد انحنائی
Necessary & sufficient conditions	ضروری اور کافی شرطیں
Normal mode	طبعی حیثیت
Strata	طبقات
Longitudinal	طولی
Deck	عرشہ (جہاز کا)
Transverse	عرضی
Nodoid	عقدہ نما
Element	عنصر، جزو
Hetrogeneous	غیر متجانس
Water-section	فاصل آب
Separability	فصل پذیری

Astronomical density

خلکی کثافت

Fathom

فیدم

Receiver

قابلہ

Rectangular hyperbola

تاقم تراشد

Hinge

قبضہ

Bow

قدامہ

Divisibility

قسمت پذیری

Parabola

قطع مکاری

Force function

قوتی تفاعل

Force to a point

قوت مال بہ نقطہ

Constraint

قید

Constraining forces

قید کرنیوالی قوتیں

Bibliography

آبیات

Spheroid

کرہ نما

Crank

کرنیک

Centre of mass

کمیت کا مرکز

Step of a helix

گام (مرغولہ کا)

Radius of gyration

گردش کا نصف قطر

Surface of revolution

گردشی سطح

Roulette

گرد و نیہ

Pitch

گھائی

Periphery, perimeter

گہیرا

Elastica

لدنیہ

Convolutions

لففہ

Anchor-ring

لنگر چلا

Sinuous	لہریلا
Hydrodynamical	ما حرکی
Hydrostatics	ما سکونیات
Focal conic	ما سکی مخروطی
Parameter	مبدل
Homogeneous	متجانس
Equilateral Hyperbola	مستساوی المحاور زائد
Isoscelus prism	مستساوی الوجہین منشور
Similar and Similarly situated	متشابه اور تشابہا واقع
Variable	متغیر
Variable density	متغیر کثافت
Convex	محدب
Position	محل
Axial plane	محوری مستوی
Helix	مرغولہ
Helicoid	مرغولہ نما
Metacentre	مرکز مابعد
Nucleus	مرکزہ
Centroid	مرکز ہندسی
Torsion	مڑوڑ
Surfaces of equipressure	مساوی دباؤ کی سطحیں
Plane	مستوی
Momental ellipsoid	معیاری ناقص نما
Concave	مقعر

Modulus	مقیاس
Bodies under constraint	مقید اجسام
Paraboloid	مکافئ بنا
Flexible surface	ملائم سطح
Unduloid	موج نما
Ellipsoid	ناقص بنا
Elliptic Integral	ناقصی تکمیل
Elliptic paraboloid	ناقصی مکافئ بنا
Synclastic	ہند انحنائی
Dew point	نقطہ شبنم
Downward pressure	نیچے وار دباؤ
Medial line	وسطی خط
Trim of a ship	وضع (جہاز کی)
Displaced fluid	ہٹایا ہوا سیال
Isothermal	ہم تپشی
Level	ہموار سطح
Air-tight	ہوا بند

---





$p$  = pressure

د = دباؤ

$p$  = perpendicular

ع = عمود

$$p = \frac{dy}{dx}$$

ع =  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

$P$  = point

ن = نقطہ

$P_n$  = Legenders nth coefficient

ع = لیجنڈر کا  $n$  واں سر

$P$  = power

ط = طاقت

$\rho$  = density

ث = کثافت

$\rho$  = radius of curvature

م = انحناء کا نصف قطر

$\sigma$  = density

ث = کثافت

$f$  = acceleration

س = اسراع

$f$  = function

ف = تفاعل

$F$  = force

ق = قوت

$k$  = constant

ک = مستقل

$k$  = radius of gyration

س = گردش کا نصف قطر

$K$  = quarter period

ک = ربعی دور

$v$  = volume

ح = حجم

$V$  = volume

ح، ح = حجم

$V$  = potential fn.

ف = توتہ تفاعل

$W$  = weight

و = وزن

$m$  = mass

ک = کمیت

$M$  = mass

$M$  = metacentre

$g$  = acc. due to gravity

$G$  = centre of gravity

$S$  = Surface

$s$  = length of an arc

$C$  = constant

$C$  = centre

$C$  = centroid

$C$  = point

$c$  = capacity

$c$  = semi-axis

$W = 8 \frac{1}{2}$

$r$  = radius

$r$  = distance

$r, \theta, \phi$  = polar co-ordinates

$r, \theta, z$  = cylindrical co-ordinates

$R$  = resultant

$R$  = reaction

$t$  = temperature

$T$  = tension

$T$  = absolute temperature

$t$  = time

$h$  = height

$h$  = depth

ک = کمیت

مر = مرکز مابعد

ج = اسراع بوجہ جاذبہ ارض

ث = مرکز ثقل

س = سطح

س = قوس کا طول

م = مرکز مستقل

ج = مرکز

ث = مرکز ہندسی

ج = نقطہ

گ = گنجائش

ج = نیم محور

و = ج = سطح

ر = نصف قطر

ف = فاصلہ

ر،  $\theta$ ،  $\phi$  = قطبی محاورہ

ر،  $\theta$ ،  $z$  = اسطوانی محاورہ

س = حاصل

س = تعامل

ت = تپش

ت = تناؤ

ت = تپش مطلق

ت = وقت

ف = ارتفاع

گ = گہرائی









